

2014年工(機工, 原工, 都市工)・知識工第2問

 数理
石井K

2 次の問に答えよ。

- (1) 定積分 $\int_1^e x^5 \log x dx$ の値を求めよ。
 (2) $f(x) = \sum_{k=1}^n (x^k)^k$ とする。微分係数 $f'(1)$ を n で表せ。
 (3) 極限值 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^2 + x} - 3x}{1 - \frac{1}{x} \cos x}$ を求めよ。

$$\begin{aligned}
 (1) \text{ (手式)} &= \int_1^e \left(\frac{x^6}{6}\right)' \log x dx \\
 &= \left[\frac{x^6}{6} \log x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^5}{6} dx \\
 &= \frac{1}{6} e^6 - \left[\frac{1}{36} x^6\right]_1^e \\
 &= \frac{1}{6} e^6 - \frac{1}{36} e^6 + \frac{1}{36} \\
 &= \frac{5e^6 + 1}{36} \text{ 〃}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) f(x) &= \sum_{k=1}^n x^{k^2} \\
 \therefore f'(x) &= \sum_{k=1}^n k^2 x^{k^2-1} \\
 \therefore f'(1) &= \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \text{ 〃}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \text{ (手式)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{9x^2+x} - 3x)(\sqrt{9x^2+x} + 3x)}{\left(1 - \frac{1}{x} \cos x\right)(\sqrt{9x^2+x} + 3x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{x} \cos x\right)\left(\sqrt{9 + \frac{1}{x}} + 3\right)}
 \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{1}{x} \cos x \leq \frac{1}{x} \quad (\because -1 \leq \cos x \leq 1 \text{ より}) \quad \text{なのではさみうちの原理より.}$$

$$x \rightarrow \infty \text{ のとき, } \pm \frac{1}{x} \rightarrow 0 \quad \therefore \frac{1}{x} \cos x \rightarrow 0$$

$$\therefore \text{ (手式)} = \frac{1}{6} \text{ 〃}$$