2014年 教育 第3問

$\boxed{3}$ aは1より大きい実数とする．

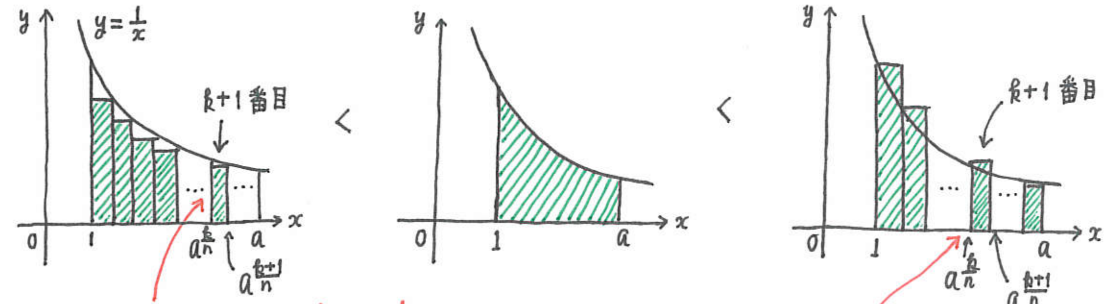
(1) 次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(a^{\frac{k+1}{n}}-a^{\frac{k}{n}}\right)\frac{1}{a^{\frac{k+1}{n}}}<\int_1^a\frac{dx}{x}<\sum_{k=0}^{n-1}\left(a^{\frac{k+1}{n}}-a^{\frac{k}{n}}\right)\frac{1}{a^{\frac{k}{n}}}$$

(2) 次の等式が成り立つことを証明せよ．

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(a^{\frac{k+1}{n}}-a^{\frac{k}{n}}\right)\frac{1}{a^{\frac{k+1}{n}}}=\int_1^a\frac{dx}{x}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(a^{\frac{k+1}{n}}-a^{\frac{k}{n}}\right)\frac{1}{a^{\frac{k}{n}}}$$

(1)



面積は $\left(a^{\frac{k+1}{n}}-a^{\frac{k}{n}}\right)\cdot\frac{1}{a^{\frac{k+1}{n}}}$　　　面積は $\left(a^{\frac{k+1}{n}}-a^{\frac{k}{n}}\right)\cdot\frac{1}{a^{\frac{k}{n}}}$

よって，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(a^{\frac{k+1}{n}}-a^{\frac{k}{n}}\right)\frac{1}{a^{\frac{k+1}{n}}}<\int_1^a\frac{dx}{x}<\sum_{k=0}^{n-1}\left(a^{\frac{k+1}{n}}-a^{\frac{k}{n}}\right)\frac{1}{a^{\frac{k}{n}}}$ ▨

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(a^{\frac{k+1}{n}}-a^{\frac{k}{n}}\right)\frac{1}{a^{\frac{k+1}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-a^{-\frac{1}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(1-a^{-\frac{1}{n}}\right)=\lim_{h\to0}\frac{1-a^{-h}}{h}$

$h=\frac{1}{n}$とおいた

ここで，$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{1-a^{-h}}{h}=-\lim_{h\to0}\frac{a^{-h}-a^{0}}{h-0}=-f'(0)=\log a$

$f(x)=a^{-x}$とした．$f'(x)=-a^{-x}\log a$

$\displaystyle\int_1^a\frac{dx}{x}=\left[\log|x|\right]_1^a=\log a$

$h=\frac{1}{n}$とした

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(a^{\frac{k+1}{n}}-a^{\frac{k}{n}}\right)\frac{1}{a^{\frac{k}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)\cdot n=\lim_{h\to0}\frac{a^{h}-1}{h-0}=g'(0)=\log a$

$g(x)=a^{x}$とした，$g'(x)=a^{x}\log a$

以上より，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(a^{\frac{k+1}{n}}-a^{\frac{k}{n}}\right)\frac{1}{a^{\frac{k+1}{n}}}=\int_1^a\frac{dx}{x}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(a^{\frac{k+1}{n}}-a^{\frac{k}{n}}\right)\frac{1}{a^{\frac{k}{n}}}$ が成り立つ ▨