

2013年薬学部第1問

1 次の問に答えよ。

(1) 連立方程式 $2x + y - 3 = 0$, $ax - y + 2a - 7 = 0$ が $x > 0$, $y > 0$ となる解をもつとき, a がとりえる値の範囲は $\boxed{2} < a < \boxed{5}$ である。

(2) x の2次方程式 $(k^2 - 1)x^2 - x + 1 = 0$ が正の2つの解 α , β をもち, かつ $k\alpha\beta = 2\alpha - \beta$ を満たすとき, $k = \frac{\boxed{1} \boxed{1}}{\boxed{10}}$, $\alpha = \frac{\boxed{1} \boxed{0}}{\boxed{3}}$, $\beta = \frac{\boxed{1} \boxed{0}}{\boxed{7}}$ である。

$$(1) \begin{cases} 2x + y - 3 = 0 & \dots \textcircled{1} \\ ax - y + 2a - 7 = 0 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{ より, } (a+2)x + 2a - 10 = 0$$

$$\therefore a \neq -2 \text{ のとき, } x = \frac{10-2a}{a+2} \quad a = -2 \text{ のとき, } -14 = 0 \text{ となり, 解なし.}$$

$$\therefore (x, y) = \left(\frac{10-2a}{a+2}, \frac{7a-14}{a+2} \right) \quad (a \neq -2 \text{ のとき}).$$

$$\therefore \frac{10-2a}{a+2} > 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{7a-14}{a+2} > 0 \quad \Leftrightarrow (10-2a)(a+2) > 0 \quad \text{かつ} \quad (7a-14)(a+2) > 0$$

$$\Leftrightarrow (a-5)(a+2) < 0 \quad \text{かつ} \quad (a-2)(a+2) > 0$$

$$\Leftrightarrow -2 < a < 5 \quad \text{かつ} \quad (a > 2 \text{ または } a < -2)$$

2つの解をもつことから $k \neq \pm 1$

$$\Leftrightarrow \underline{2 < a < 5} //$$

(2) 解と係数の関係より, $\alpha\beta = \frac{1}{k^2-1}$

$$\therefore \frac{k}{k^2-1} = 2 \cdot \frac{1+\sqrt{1-4(k^2-1)}}{2(k^2-1)} - \frac{1-\sqrt{1-4(k^2-1)}}{2(k^2-1)} \quad \text{または, } \frac{k}{k^2-1} = 2 \cdot \frac{1-\sqrt{1-4(k^2-1)}}{2(k^2-1)} - \frac{1+\sqrt{1-4(k^2-1)}}{2(k^2-1)}$$

$$\Leftrightarrow 2k = 2 + 2\sqrt{5-4k^2} - 1 + \sqrt{5-4k^2} \quad \text{または, } 2k = 2 - 2\sqrt{5-4k^2} - 1 - \sqrt{5-4k^2}$$

$$\Leftrightarrow 2k - 1 = 3\sqrt{5-4k^2} \quad \text{または, } 2k - 1 = -3\sqrt{5-4k^2} \dots \textcircled{4}$$

$$\text{両辺を2乗すると, } 4k^2 - 4k + 1 = 9(5-4k^2)$$

$$\therefore 40k^2 - 4k - 44 = 0 \quad \therefore 4(k+1)(10k-11) = 0 \quad k \neq \pm 1 \text{ より}$$

このとき, $2k - 1 > 0$ より, ④ ①の方が成り立つ。

$$k = \frac{11}{10} //$$

$$\therefore \alpha > \beta \quad \text{このとき, } \alpha = \frac{1+\sqrt{5-4 \cdot \frac{121}{100}}}{2 \cdot \frac{21}{100}} = \frac{10}{3} //, \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5-4 \cdot \frac{121}{100}}}{2 \cdot \frac{21}{100}} = \frac{10}{7} //$$