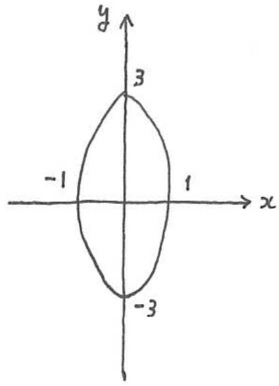
2015年 理工学部 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 座標平面上の楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{9}=1$ を C とし，点 $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$ を $\alpha>0$，$\beta>0$ を満たす C 上の点とする．点 P における C の接線 ℓ と x 軸，y 軸との交点をそれぞれ Q，R とおく．



(1) ℓ の方程式を α，β を用いて表せ．

(2) 線分 QR の長さの2乗を α を用いて表せ．

(3) 線分 QR の長さの最小値を求めよ．

(1) $\ell : \alpha x+\dfrac{\beta y}{9}=1$ //

(2) ℓ の方程式に $y=0$ を代入すると $x=\dfrac{1}{\alpha}$　$\therefore \mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{\alpha},0\right)$

$x=0$ を代入すると，$y=\dfrac{9}{\beta}$　$\therefore \mathrm{R}\left(0,\dfrac{9}{\beta}\right)$

$\therefore \mathrm{QR}^2=\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{81}{\beta^2}$　…①

ここで，$\mathrm{P}(\alpha,\beta)$ は楕円上の点より．$\alpha^2+\dfrac{\beta^2}{9}=1$　$\therefore \beta^2=9-9\alpha^2$　…②

②を①に代入して，

$\mathrm{QR}^2=\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{9}{1-\alpha^2}$ //

(3) (2)で求めた QR^2 を $f(\alpha)$ とおくと．$f(\alpha)=\alpha^{-2}+9(1-\alpha^2)^{-1}$

$$\therefore f'(\alpha)=-2\alpha^{-3}-9(1-\alpha^2)^{-2}\cdot(-2\alpha)$$
$$=-\frac{2}{\alpha^3}+\frac{18\alpha}{(1-\alpha^2)^2}$$
$$=\frac{-2(1-\alpha^2)^2+18\alpha^4}{\alpha^3(1-\alpha^2)^2}$$
$$=\frac{2(2\alpha^2+1)(2\alpha+1)(2\alpha-1)}{\alpha^3(1-\alpha^2)^2}$$

α	(0)	…	$\frac{1}{2}$	…	(1)
$f'(\alpha)$		$-$	0	$+$	
$f(\alpha)$		↘	16	↗	

$0<\alpha<1$ より，$f'(\alpha)=0$ となるのは．$\alpha=\dfrac{1}{2}$

$\therefore$ 右の増減表より，$\alpha=\dfrac{1}{2}$ のとき．QR^2 の最小値は 16

$\therefore$ QR の最小値は 4 $\left(\alpha=\dfrac{1}{2}\text{のとき}\right)$ //