0000061736283999

室蘭工業大学

2011年 工学部 第2問　　1枚目／2枚

数理 石井K

2 正の整数 n に対して，$S_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t}\,dt$ とおく．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) $S_{n+1}(x)$ を n，x および $S_n(x)$ を用いて表せ．

(2) m を正の整数とする．$x > 0$ のとき，不等式 $e^{\frac{x}{m+1}} > \frac{x}{m+1}$ が成り立つことを示せ．また，$\lim_{x\to\infty} \frac{x^m}{e^x} = 0$ となることを示せ．

(3) 数学的帰納法を用いて，すべての正の整数 n に対して，$\lim_{x\to\infty} S_n(x) = n!$ となることを示せ．

(1) $S_{n+1}(x) = \int_0^x t^{n+1}(-e^{-t})'\,dt$

$= \left[-t^{n+1}e^{-t}\right]_0^x + \int_0^x (n+1)t^n e^{-t}\,dt$

$= \underline{-x^{n+1}e^{-x} + (n+1)S_n(x)}$ //

(2) $f(x) = e^{\frac{x}{m+1}} - \frac{x}{m+1}$ とおくと，

(別) $t = \frac{x}{m+1}$ とおいて $t>0$ において $e^t > t$ を示してもよい

$f'(x) = \frac{1}{m+1}e^{\frac{x}{m+1}} - \frac{1}{m+1}$

$= \frac{1}{m+1}\left(e^{\frac{x}{m+1}} - 1\right)$

$m>0$ と，$x>0$ より $e^{\frac{x}{m+1}} > 1$ なので $f'(x) > 0$

よって，$f(x)$ は単調増加で，$f(x) > f(0) = 1$　∴ $f(x) > 0$

∴ $x>0$ のとき，$e^{\frac{x}{m+1}} > \frac{x}{m+1}$ が成り立つ ▨

この不等式の両辺を $(m+1)$ 乗して，$e^x > \frac{x^{m+1}}{(m+1)^{m+1}}$

∴ $x>0$ において．$0 < \frac{x^m}{e^x} < \frac{(m+1)^{m+1}}{x}$

$x\to\infty$ のとき，$\frac{(m+1)^{m+1}}{x} \to 0$　∴ はさみうちの原理より，$\lim_{x\to\infty}\frac{x^m}{e^x} = 0$ ▨

(3) (i) $n=1$ のとき．

$S_1(x) = \int_0^x t(-e^{-t})'\,dt$

$= \left[-te^{-t}\right]_0^x + \int_0^x e^{-t}\,dt$

$= -xe^{-x} + \left[-e^{-t}\right]_0^x$

$= -(x+1)e^{-x} + 1$

∴ (2)より．$\lim_{x\to\infty} S_1(x) = 1\ (=1!)$　よって $n=1$ のときは成り立つ．

2枚目につづく

2011年 工学部 第2問　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ 正の整数 n に対して，$S_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t}\,dt$ とおく．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) $S_{n+1}(x)$ を n，x および $S_n(x)$ を用いて表せ．

(2) m を正の整数とする．$x > 0$ のとき，不等式 $e^{\frac{x}{m+1}} > \frac{x}{m+1}$ が成り立つことを示せ．また，$\lim_{x\to\infty} \frac{x^m}{e^x} = 0$ となることを示せ．

(3) 数学的帰納法を用いて，すべての正の整数 n に対して，$\lim_{x\to\infty} S_n(x) = n!$ となることを示せ．

(3) のつづき.

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定すると,

$$\lim_{x\to\infty} S_k(x) = k! \quad \cdots ①$$

(1)より,

$$\lim_{x\to\infty} S_{k+1}(x) = \lim_{x\to\infty} -x^{k+1}e^{-x} + (k+1)\lim_{x\to\infty} S_k(x)$$

$$= (k+1)\cdot k! \quad (\because ① と (2) より)$$

$$= (k+1)!$$

$\therefore$ $n=k+1$ のとき. 成り立つ.

(i).(ii) より. すべての正の整数 n に対して, $\lim_{x\to\infty} S_n(x) = n!$ となる ■