鳥取大学

2016年 工・農・医（生命科学）第3問

$\boxed{3}$ 実数βは$\beta > 1$を満たす定数とする．$x > 0$に対し関数$f(x)$を$f(x) = \dfrac{\log x}{x^{\beta}}$で定めるとき，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$の増減を調べ，極値を求めよ．

(2) $a > 1$を満たす実数aに対して，$I(a) = \int_1^a f(x)\,dx$とおくとき，$I(a)$を求めよ．

(1) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot x^{\beta} - (\log x)\cdot \beta x^{\beta-1}}{x^{2\beta}} = \dfrac{1-\beta\log x}{x^{\beta+1}}$

$\therefore$ $f'(x) = 0$ となるのは，$1-\beta\log x = 0 \iff \log x = \dfrac{1}{\beta}$

$\iff x = e^{\frac{1}{\beta}}$

のときであり，増減表は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$e^{\frac{1}{\beta}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{1}{\beta e}$	$\searrow$

$\therefore$ 極大値 $\dfrac{1}{\beta e}$ （$x = e^{\frac{1}{\beta}}$ のとき）//

(2) $I(a) = \displaystyle\int_1^a \left(\frac{x^{1-\beta}}{1-\beta}\right)' \log x\,dx$

$= \left[\dfrac{x^{1-\beta}}{1-\beta}\log x\right]_1^a - \displaystyle\int_1^a \frac{x^{-\beta}}{1-\beta}\,dx$

$= \dfrac{a^{1-\beta}\log a}{1-\beta} - \left[\dfrac{x^{1-\beta}}{(1-\beta)^2}\right]_1^a$

$= \dfrac{a^{1-\beta}\log a}{1-\beta} + \dfrac{1-a^{1-\beta}}{(1-\beta)^2}$ //