

2013年学芸(数学)第3問

 数理
石井K

3 次の問に答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 5a_n - 4 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と定める。数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。(2) $b_n = \frac{n!}{a_n - 1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) と定める。 $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ を n を用いて表せ。(3) b_n を最小とするような n の値をすべて求めよ。

$$(1) \quad a_{n+1} - 1 = 5(a_n - 1)$$

 \therefore 数列 $\{a_n - 1\}$ は初項 1, 公比 5 の等比数列

$$\therefore a_n - 1 = 5^{n-1} \quad \therefore \underline{a_n = 5^{n-1} + 1} //$$

$$(2) \quad \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{a_{n+1} - 1}}{\frac{n!}{a_n - 1}} = \frac{(n+1)! \cdot (a_n - 1)}{n! \cdot (a_{n+1} - 1)} = \frac{(n+1)! \cdot 5^{n-1}}{n! \cdot 5^n} = \underline{\frac{n+1}{5}} //$$

$$(3) \quad \frac{b_{n+1}}{b_n} \leq 1 \text{ となるのは (2) より } \frac{n+1}{5} \leq 1 \quad \therefore n \leq 4 \quad (\text{等号は } n=4 \text{ のときのみ成り立つ})$$

$$\therefore \frac{b_{n+1}}{b_n} \leq 1 \Leftrightarrow b_{n+1} \leq b_n \text{ なので, } b_1 > b_2 > b_3 > b_4 = b_5 < b_6 < \dots$$

$$\therefore b_n \text{ が } \underline{\text{最小になるのは } n=4, 5 \text{ のとき}} //$$