



2012年 第4問

4 四面体  $OABC$  において、次が満たされているとする。

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OB} \cdot \vec{OC} = \vec{OC} \cdot \vec{OA}$$

点  $A, B, C$  を通る平面を  $\alpha$  とする。点  $O$  を通り平面  $\alpha$  と直交する直線と、平面  $\alpha$  との交点を  $H$  とする。

- (1)  $\vec{OA}$  と  $\vec{BC}$  は垂直であることを示せ。
- (2) 点  $H$  は  $\triangle ABC$  の垂心であること、すなわち  $\vec{AH} \perp \vec{BC}$ ,  $\vec{BH} \perp \vec{CA}$ ,  $\vec{CH} \perp \vec{AB}$  を示せ。
- (3)  $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}| = 2$ ,  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OB} \cdot \vec{OC} = \vec{OC} \cdot \vec{OA} = 1$  とする。このとき、 $\triangle ABC$  の各辺の長さおよび線分  $OH$  の長さを求めよ。