

2016年医学部第25問

 数理
石井

 25 定積分 $\frac{16}{\pi} \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$ の値を求めよ。

 $x = \sin \theta$ とおいて置換積分する $dx = \cos \theta d\theta$, $\frac{x}{\theta} \begin{matrix} 0 \rightarrow 1 \\ 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{matrix}$

$$(\text{与式}) = \frac{16}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta$$

$$= \frac{16}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} \cdot \sin^2 2\theta d\theta$$

$$= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4\theta}{2} d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos 4\theta d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\theta - \frac{1}{4} \sin 4\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} \right)$$

$$= \underline{\underline{1}}$$