

2014年薬学部第1問

 数理
石井K

1 次の問いに答えよ。

- (1) 4次式 $x^2 + (x^2 - 1)^2$ を複素数の範囲で因数分解すると である。
 (2) 不等式 $x + 2 \leq |x^2 - x - 6|$ を x について解くと である。
 (3) 関数 $F(x)$ が $F'(x) = (3x + 2)^2$, $F(0) = 3$ を満たすとき $F(x) =$ である。
 (4) 2次方程式 $x^2 - 4x - 2 = 0$ の2つの解を α, β とする。 $a_n = \alpha^n - \beta^n$ (n は自然数) とおく。このとき、 $\frac{a_{10} - 2a_8}{a_9}$ の値を求めると である。

$$\begin{aligned}
 (1) \text{ (与式)} &= x^4 - x^2 + 1 \\
 &= (x^2 + 1)^2 - 3x^2 \\
 &= (x^2 + \sqrt{3}x + 1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1) \\
 &= \left(x + \frac{\sqrt{3} - i}{2}\right) \left(x + \frac{\sqrt{3} + i}{2}\right) \\
 &\quad \times \left(x - \frac{\sqrt{3} + i}{2}\right) \left(x - \frac{\sqrt{3} - i}{2}\right)
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad x + 2 \leq |(x + 2)(x - 3)|$$

よって、(i) $-2 \leq x \leq 3$ のとき、

$$x + 2 \leq -x^2 + x + 6$$

$$\therefore x^2 \leq 4$$

$$\therefore -2 \leq x \leq 2$$

(ii) $x > 3$ または $x < -2$ のとき、

$$(x - 4)(x + 2) \geq 0$$

$$\therefore x \geq 4, x \leq -2$$

場合分けの範囲を考えると、 $x \geq 4, x < -2$

$$(i), (ii) \text{ より, } \underline{x \leq 2, x \geq 4}$$

$$(3) \quad F(x) = \frac{1}{9}(3x + 2)^3 + C \quad \text{より} \quad F(0) = \frac{8}{9} + C = 3 \quad \therefore C = \frac{19}{9}$$

$$\therefore \underline{F(x) = 3x^3 + 6x^2 + 4x + 3}$$

$$(4) \quad \text{解と係数の関係より, } \alpha + \beta = 4, \alpha\beta = -2 \quad \text{(注) } \alpha > \beta \text{ とした}$$

$$\frac{a_{10} - 2a_8}{a_9} = \frac{\alpha^{10} - \beta^{10} - 2\alpha^8 + 2\beta^8}{\alpha^9 - \beta^9}$$

$$\alpha^{10} = 4\alpha^9 + 2\alpha^8, \beta^{10} = 4\beta^9 + 2\beta^8 \text{ より}$$

$$= \frac{4(\alpha^9 - \beta^9)}{\alpha^9 - \beta^9}$$

$$= \underline{4}$$