大阪府立大学

2014 年 第 4 問

数理 石井K

$\boxed{4}$ a は正の定数とし，曲線 $C_1 : y = ax^2$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ と $C_2 : y = \dfrac{1}{a}(x-1)^2$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ および x 軸で囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする．

(1) C_1 と C_2 の交点の x 座標を求めよ．

(2) $S(a)$ を求めよ．

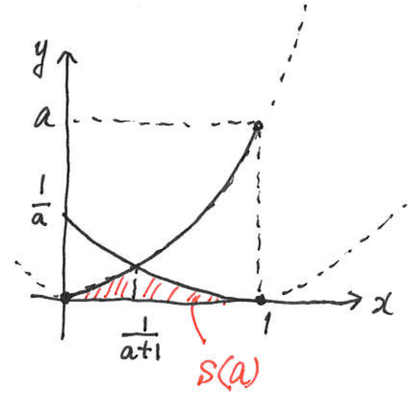
(3) a がすべての正の実数を動くとき，$S(a)$ の最大値とそれを与える a の値を求めよ．

(1) $ax^2 - \frac{1}{a}(x-1)^2 = 0$

$\therefore \{(a-1)x+1\}\{(a+1)x-1\} = 0$

$a \neq 1$ のとき，$0 \leqq x \leqq 1$ での解は $\underline{x = \frac{1}{a+1}}$ // これは $a=1$ の場合も含んでいる．

(2) $S(a) = \int_0^{\frac{1}{a+1}} ax^2 dx + \int_{\frac{1}{a+1}}^{1} \frac{1}{a}(x-1)^2 dx$



$= \left[\frac{ax^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{a+1}} + \left[\frac{(x-1)^3}{3a}\right]_{\frac{1}{a+1}}^{1}$

$= \frac{a}{3(a+1)^3} + \frac{a^3}{3a(a+1)^3}$

$= \frac{a(a+1)}{3(a+1)^3}$

$= \underline{\frac{a}{3(a+1)^2}}$ //

(3) $S(a) = \frac{1}{3(a+2+\frac{1}{a})}$

等号成立は $a = \frac{1}{a}$ のとき $a>0$ より $a=1$ のとき．

$a>0$，なので相加・相乗の関係より．$a + \frac{1}{a} \geqq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 2$

$\therefore$ $S(a)$ の最大値は $\underline{\frac{1}{12}\ (a=1 \text{ のとき})}$ //