立教大学

2016年 理学部（個別日程）第1問　　1枚目/2枚　　数理 石井K

1 次の空欄 ア ～ コ に当てはまる数または式を記入せよ．

(1) x，y を実数とするとき，座標平面上の点 $\mathrm{P}(3\sin x+5\sin y,\ 3\cos x+5\cos y)$ と原点との距離の最小値は ア 2 であり，最大値は イ 8 である．

(2) $2016x+401y=1$ を満たす整数 x，y で $0<x<401$ となるのは，$x=$ ウ 73，$y=$ エ −367 のときである．

(3) $0\leqq x\leqq 1$ のとき，関数 $f(x)=\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}$ は，$x=$ オ $\frac{1}{5}$ において最大値 カ $\sqrt{5}$ をとる．

(4) Oを原点とする座標空間内の2点 $\mathrm{A}(4,\ -1,\ 3)$，$\mathrm{B}(2,\ 1,\ 1)$ を通る直線と xy 平面の交点をCとするとき，Cの座標は キ (1, 2, 0) である．また，直線ABと直線OCのなす角を θ $\left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ とすると，$\cos\theta=$ ク $\frac{1}{\sqrt{15}}$ である．

(5) 袋の中に赤玉と白玉が合わせて8個入っている．この袋の中から2個の玉を同時に取り出すとき，取り出した玉が両方とも白である確率が $\frac{5}{14}$ である．このとき，袋の中の白玉は ケ 5 個である．また，取り出した玉を元に戻し，この袋からあらたに2個の玉を同時に取り出すとき，赤玉と白玉が1個ずつである確率は コ $\frac{15}{28}$ である．

(1) $OP^2=(3\sin x+5\sin y)^2+(3\cos x+5\cos y)^2$

$=9(\sin^2 x+\cos^2 x)+30(\sin x\sin y+\cos x\cos y)+25(\sin^2 y+\cos^2 y)$

$=30\cos(x-y)+34$

ここで，$0\leqq x<2\pi$，$0\leqq y<2\pi$ として考えると，$-2\pi<x-y<2\pi$

∴ OP^2 の最小値は 4，最大値は 64　∴ OPの最小値は2，最大値は8 //

(2) ユークリッドの互除法より

2016と401の最大公約数を求める

$2016=401\times5+11$

$401=11\times36+5$

$11=5\times2+1$

∴最大公約数は1で

$1=11-5\times2$

$=11-(401-11\times36)\times2$

$=11\times73-401\times2$

$=(2016-401\times5)\times73-401\times2$

$=2016\times73+401\times(-367)$

特殊解は $(x,y)=(73,-367)$ //

記述式のテストでは，この解以外にないことを言わないといけないが，今回はカッコうめなので略．

(3) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

$=\dfrac{\sqrt{1-x}-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x(1-x)}}$

$f'(x)=0 \iff \sqrt{1-x}=2\sqrt{x}$

$\iff 1-x=4x$

$\iff x=\frac{1}{5}$

x	0	…	$\frac{1}{5}$	…	1
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	2	↗		↘	1

∴ $x=\frac{1}{5}$ のとき，最大値 $f\left(\frac{1}{5}\right)=\sqrt{5}$ //

立教大学

2016年 理学部（個別日程） 第1問　2枚目/2枚

数理 石井K

$\boxed{1}$ 次の空欄 $\boxed{ア}$ ～ $\boxed{コ}$ に当てはまる数または式を記入せよ．

(1) x, y を実数とするとき，座標平面上の点 $P(3\sin x+5\sin y,\ 3\cos x+5\cos y)$ と原点との距離の最小値は $\boxed{ア}$ であり，最大値は $\boxed{イ}$ である．

(2) $2016x+401y=1$ を満たす整数 x, y で $0<x<401$ となるのは，$x=\boxed{ウ}$，$y=\boxed{エ}$ のときである．

(3) $0\leqq x\leqq 1$ のとき，関数 $f(x)=\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}$ は，$x=\boxed{オ}$ において最大値 $\boxed{カ}$ をとる．

(4) Oを原点とする座標空間内の2点 $A(4,\ -1,\ 3)$，$B(2,\ 1,\ 1)$ を通る直線と xy 平面の交点をCとするとき，Cの座標は $\boxed{キ}$ である．また，直線ABと直線OCのなす角を θ $\left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ とすると，$\cos\theta=\boxed{ク}$ である．

(5) 袋の中に赤玉と白玉が合わせて8個入っている．この袋の中から2個の玉を同時に取り出すとき，取り出した玉が両方とも白である確率が $\frac{5}{14}$ である．このとき，袋の中の白玉は $\boxed{ケ}$ 個である．また，取り出した玉を元に戻し，この袋からあらたに2個の玉を同時に取り出すとき，赤玉と白玉が1個ずつである確率は $\boxed{コ}$ である．

(4) $C(x,y,0)$ とおける．3点A,B,Cは同一直線上にあるので

$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ となる実数 k が存在する．

$\therefore (x-4,\ y+1,\ -3)=k(-2,2,-2)$

$$\therefore \begin{cases} x-4=-2k \\ y+1=2k \\ -3=-2k \end{cases} \quad \therefore k=\frac{3}{2},\ x=1,\ y=2 \quad \therefore \underline{C(1,2,0)}_{\,/\!/}$$

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{OC}|}=\frac{-2+4+0}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}=\underline{\frac{1}{\sqrt{15}}}_{\,/\!/}$$

(5) 白玉の個数をn個とすると．赤玉は $8-n$ 個.

$$\therefore \frac{{}_nC_2}{{}_8C_2}=\frac{5}{14} \quad \therefore 14\cdot\frac{n(n-1)}{2}=5\cdot 28$$

$$\therefore n(n-1)=20 \quad \therefore \underline{n=5}_{\,/\!/}$$

白玉5個．赤玉3個．

$$\therefore \frac{5\times 3}{{}_8C_2}=\underline{\frac{15}{28}}_{\,/\!/}$$