



2011年理系第2問

2  $a, b$  を実数の定数とし, 3つの行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ a & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

は  $AR = QA$  を満たしている. 次の  をうめよ.

$AR = QA$  を満たす  $a$  の値は 2 つある. そのうち,  $A$  が逆行列をもたないのは,  $a = \text{①}$  のときであり, このとき,  $b = \text{②}$  である.  $A$  が逆行列  $A^{-1}$  をもつのは,  $a = \text{③}$  のときであり, このとき,  $A^{-1} = \text{④}$ ,  $b = \text{⑤}$  である.

$n$  を 2 以上の自然数として,

$$S_n = A + AR + AR^2 + \cdots + AR^{n-1}$$

とおく.  $AR = QA$  であるから,  $S_n$  は実数  $x_n, y_n$  を用いて

$$S_n = \begin{pmatrix} x_n & 0 \\ 0 & y_n \end{pmatrix} A$$

と表される.

$a = \text{③}$  のときは,  $x_n = \text{⑥}$ ,  $y_n = \text{⑦}$  である. したがって,  $E$  を単位行列として,

$$E + R + R^2 + \cdots + R^{n-1} = \begin{pmatrix} p_n & q_n \\ r_n & s_n \end{pmatrix}$$

とおくと,  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \text{⑧}$  である.