

2012年工学部第2問

 数理
石井K

 2 a, b を定数とする。関数 $f(x)$ は $0 < x < 2$ で定義され、条件

$$f'(x) = \frac{2a}{x(2-x)} + b, \quad f'\left(\frac{1}{2}\right) = 9, \quad f'(1) = 7, \quad f(1) = 1$$

を満たすとする。

- (1) a, b の値を求めよ。
 (2) 関数 $f(x)$ を求めよ。
 (3) 曲線 $y = f(x)$ の変曲点を求めよ。

$$(1) f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2a}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}} + b \quad \therefore \frac{8}{3}a + b = 9 \quad \therefore 8a + 3b = 27 \dots \textcircled{1}$$

$$f'(1) = \frac{2a}{1 \cdot 1} + b \quad \therefore 2a + b = 7 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } \underline{a=3, b=1} //$$

$$(2) f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= \int \frac{6}{x(2-x)} + 1 dx$$

$$= \int 3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2-x}\right) + 1 dx \quad \left. \vphantom{\int} \right\} 0 < x < 2 \text{ に注意する}$$

$$= 3 \log x - 3 \log(2-x) + x + C \quad (C: \text{積分定数})$$

$$f(1) = 1 \text{ より, } C = 0 \quad \therefore \underline{f(x) = 3 \log x - 3 \log(2-x) + x} //$$

$$(3) f'(x) = \frac{6}{x(2-x)} + 1 \text{ より, } f''(x) = \frac{-6\{2-x+x \cdot (-1)\}}{x^2(2-x)^2} = \frac{12(x-1)}{x^2(2-x)^2}$$

 \therefore 右の増減表より

 変曲点は $\underline{(1, 1)}$ //

x	(0)	...	1	...	(2)
$f'(x)$		+	+	+	
$f''(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↗	1	↗	