

2015年神学・経済第5問



5 集合 X_k は次のように定義される。

$$X_k = \left\{ \frac{1}{x} \mid x \text{ は } k \text{ 桁の自然数で, } x \text{ の全ての位に } 1 \text{ を含まない.} \right\}$$

また, $n(X_k)$ は X_k の要素の個数, $s(X_k)$ は X_k の全ての要素の和とする. たとえば, $n(X_1) = 8$, $s(X_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{9}$ である. 以下の問に答えよ.

- (1) $n(X_3)$ を求めよ.
- (2) $s(X_1) < 4$ を証明せよ.
- (3) $s(X_2) < \frac{18}{5}$ を証明せよ.
- (4) $s(X_1) + s(X_2) + s(X_3) < \frac{271}{25}$ を証明せよ.

(1) x の百の位, 十の位, 一の位の選び方がそれぞれ 8通り, 9通り, 9通り

$$\therefore n(X_3) = 8 \times 9 \times 9 = 648$$

$$(2) s(X_1) < \frac{1}{2} \times n(X_1) = 4 \quad \square$$

$$(3) n(X_2) = 8 \times 9 = 72$$

$$s(X_2) = \frac{1}{20} + \frac{1}{22} + \frac{1}{23} + \dots + \frac{1}{99}$$

$$< \frac{1}{20} \times n(X_2)$$

$$= \frac{1}{20} \times 72$$

$$= \frac{18}{5} \quad \square$$

$$(4) s(X_3) = \frac{1}{200} + \frac{1}{202} + \dots + \frac{1}{999}$$

$$< \frac{1}{200} \times n(X_3)$$

$$= \frac{648}{200}$$

$$= \frac{81}{25}$$

$$\therefore s(X_1) + s(X_2) + s(X_3) < 4 + \frac{18}{5} + \frac{81}{25}$$

$$= \frac{271}{25} \quad \square$$