信州大学

2012年 工学部 第3問

3 実数 a に対して，関数 $f_a(x) = -3x^2 + \left(\frac{5}{4} - x\right)\int_0^a f_a(t)\,dt$ を満たすとする．

(1) $k = \int_0^a f_a(t)\,dt$ とおく．このとき，k を a の分数式で表せ．

(2) どのような実数 a に対しても，2次方程式 $f_a(x) = 4x - 20$ が異なる2つの実数解をもつことを示せ．

(3) (2)の方程式の解がともに正であるような a の値の範囲を求めよ．

(1) $f_a(x) = -3x^2 + \left(\frac{5}{4} - x\right)k$ と表せるから，

$$k = \int_0^a -3t^2 + \left(\frac{5}{4} - t\right)k\,dt$$

$$= \left[-t^3 - \frac{k}{2}t^2 + \frac{5}{4}kt\right]_0^a$$

$$= -a^3 - \frac{k}{2}a^2 + \frac{5}{4}ka$$

$\therefore\ 4k = -4a^3 - 2a^2k + 5ak$

$\therefore\ (2a^2 - 5a + 4)k = -4a^3$

ここで，$2a^2 - 5a + 4 = 2\left(a - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0$ より $\underline{k = -\dfrac{4a^3}{2a^2 - 5a + 4}}$ //

(2)

$f_a(x) - (4x - 20) = 0 \iff -3x^2 - kx + \frac{5}{4}k - 4x + 20 = 0$

$\iff 3x^2 + (k+4)x - \frac{5}{4}k - 20 = 0 \quad \cdots (*)$

判別式を D とおくと，

$$D = (k+4)^2 - 4\cdot 3\cdot\left(-\frac{5}{4}k - 20\right)$$

$$= k^2 + 23k + 256$$

$$= \left(k + \frac{23}{2}\right)^2 + \frac{495}{4}$$

$$> 0$$

$\therefore$ 異なる2つの実数解をもつ ▨

(3) (*)において解と係数の関係より，

$-\frac{k+4}{3} > 0$ かつ $-\frac{1}{3}\left(\frac{5}{4}k + 20\right) > 0 \iff k < -4$ かつ $k < -16$

$\iff -\dfrac{4a^3}{2a^2 - 5a + 4} < -16$

$\iff a^3 - 8a^2 + 20a - 16 > 0$

$\iff (a-2)^2(a-4) > 0$

よって，$\underline{a > 4}$ //