



2017年教育・薬学部第4問

4 放物線 $C: y = x^2$ と定点 $A(0, 1)$, $B(0, 2)$ および C 上の第1象限の点 $P_1(2, 4)$ が与えられている。自然数 $n = 1, 2, 3, \dots$ について、以下の操作をくり返す。

C 上の第1象限の点 $P_n(p_n, p_n^2)$ に対し、

手順1 直線 P_nA と C との交点のうち、第2象限にあるものを $Q_n(q_n, q_n^2)$ とし、

手順2 直線 Q_nB と C との交点のうち、第1象限にあるものを $P_{n+1}(p_{n+1}, p_{n+1}^2)$ とする。

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) a を定数とする。直線 $y = ax + 1$ と C との交点のうち、第1象限にあるものを $P(p, p^2)$ 、第2象限にあるものを $Q(q, q^2)$ とする。このとき、 $pq = -1$ が成り立つことを示せ。また、点 Q_1 の座標を求めよ。
- (2) 点 P_2 , Q_2 および P_3 の座標を求めよ。
- (3) 数列 $\{p_n\}$ および数列 $\{q_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。
- (4) $x \geq 0$ の範囲において、 C と直線 P_nQ_n および y 軸で囲まれた図形の面積 S_n を求めよ。さらに、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n+1}}{S_n}$ を求めよ。