0002389450167999

# 長崎大学

2017年 医学部 第2問

増田

$\boxed{2}$ 空間内の3点A, B, Cを頂点とする△ABCを考える. 2辺BC, ACの中点をそれぞれM, Nとし, 中線AMとBNの交点をGとする. 以下の問いに答えよ.

(1) $\overrightarrow{AG}$を, $\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{AC}$を用いて表せ.

(2) 2点P, Qが$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PQ}$を満たすとき, 3点P, Q, Gは同一直線上にあることを示せ.

(3) △ABCの頂点の座標がA(0, 0, 1), B(7, 0, 6), C(2, 12, 5)であるとき, $xy$平面上を動く点P($x$, $y$, 0)を考える. このとき, $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|$の最小値とそのときのPの座標を求めよ.

(4) (3)において, 特に点P($x$, $y$, 0)が, $xy$平面上の円$x^2+y^2=1$の周上を動くものとする. $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|$の最大値とそのときのPの座標, および最小値とそのときのPの座標を, それぞれ求めよ.

(1) 点Gは中線の交点なので、重心となり、

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}$$

(2) 点Gは△ABCの重心なので、任意の点Pに対して

$$\overrightarrow{PG}=\frac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}}{3}$$

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=3\overrightarrow{PG}=\overrightarrow{PQ}$$

$\overrightarrow{PG}$と$\overrightarrow{PQ}$が実数倍の関係にあるので、3点P, Q, Gは同一直線上にある。

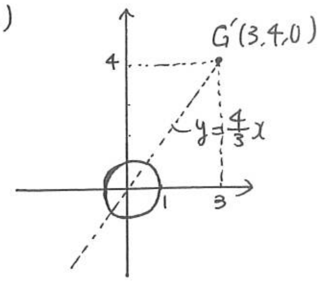
(3) $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|=|3\overrightarrow{PG}|$

Gの座標は $G\left(\frac{0+7+2}{3}, \frac{0+0+12}{3}, \frac{1+6+5}{3}\right)=(3, 4, 4)$

点(3, 4, 4)と$xy$平面上の点Pのキョリの最小は、$xy$平面に下ろした垂線との交点であり、最小値は $4\times3=12$

また、点P(3, 4, 0)

(4)




$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|=|3\overrightarrow{PG}|$ が最大・最小となるのは、点Gを$xy$平面に下ろした点G'(3,4,0)と円$x^2+y^2=1$のキョリの最大・最小を考えて

最小は $y=\frac{4}{3}x$ と円 $x^2+y^2=1$ の第一象限の交点にPがあるとき

$P\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)$ のとき 最小値 $|3\overrightarrow{PG}|=12\sqrt{2}$

最大は $y=\frac{4}{3}x$ と円 $x^2+y^2=1$ の第三象限の交点にPがあるとき

$P\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 0\right)$ のとき

最大値 $|3\overrightarrow{PG}|=6\sqrt{13}$