一橋大学

2014年 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 半径1の球が直円錐に内接している．この直円錐の底面の半径を r とし，表面積を S とする．

(1) S を r を用いて表せ．

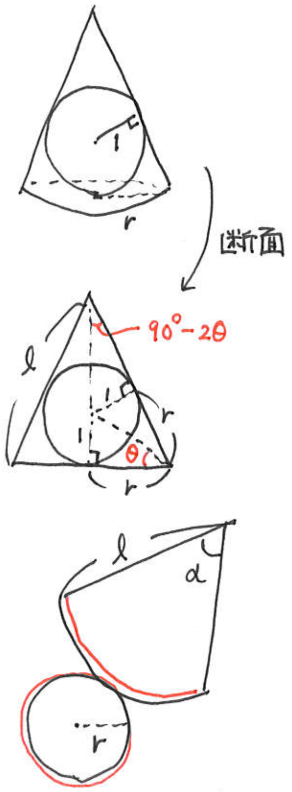
(2) S の最小値を求めよ．

(1) 右の断面の θ に対して．

$$\cos\theta = \frac{r}{\sqrt{r^2+1}}, \quad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{r^2+1}}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sin(90^\circ - 2\theta) &= \cos 2\theta \\ &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ &= \frac{r^2-1}{r^2+1}\end{aligned}$$

$$\therefore l = r \cdot \frac{1}{\sin(90^\circ - 2\theta)} = \frac{r(r^2+1)}{r^2-1}$$



$$2\pi r = 2l\pi \cdot \frac{\alpha}{2\pi}$$

$$\therefore \alpha = \frac{2\pi r}{l}$$

$$\begin{aligned}\therefore S &= \pi r^2 + \pi l^2 \cdot \frac{r}{l} \\ &= \pi r^2 + \pi r \cdot \frac{r(r^2+1)}{r^2-1} \\ &= \underline{\frac{2\pi r^4}{r^2-1}} \;/\!/\end{aligned}$$

(2)

$t = r^2 - 1$ とおくと $(t > 0)$

$t>0$ より 相加・相乗

$$\begin{aligned}S = \frac{2\pi(t+1)^2}{t} &= 2\pi\left(t + 2 + \frac{1}{t}\right) \\ &\geqq 2\pi\left(2 + 2\sqrt{t \cdot \frac{1}{t}}\right) \\ &= 8\pi\end{aligned}$$

等号成立は
$t=1$
すなわち
$r^2=2 \Leftrightarrow r=\sqrt{2}$

$\therefore$ <u>S の最小値は 8π $(r=\sqrt{2}$ のとき$)$</u> //