



2012年 第3問

3  $n$  を 3 以上の整数とする.  $xyz$  空間の平面  $z = 0$  上に, 1 辺の長さが 4 の正  $n$  角形  $P$  があり,  $P$  の外接円の中心を  $G$  とおく. 半径 1 の球  $B$  の中心が  $P$  の辺に沿って 1 周するとき,  $B$  が通過してできる立体を  $K_n$  とする. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1)  $P$  の隣り合う 2 つの頂点  $P_1, P_2$  をとる.  $G$  から辺  $P_1P_2$  に下ろした垂線と  $P_1P_2$  との交点を  $Q$  とするとき,  $GQ > 1$  となることを示せ.
- (2) 次の各問に答えよ.
  - (i)  $K_n$  を平面  $z = t$  ( $-1 \leq t \leq 1$ ) で切ったときの断面積  $S(t)$  を  $t$  と  $n$  を用いて表せ.
  - (ii)  $K_n$  の体積  $V(n)$  を  $n$  を用いて表せ.
- (3)  $G$  を通り, 平面  $z = 0$  に垂直な直線を  $\ell$  とする.  $K_n$  を  $\ell$  のまわりに 1 回転させてできる立体の体積  $W(n)$  を  $n$  を用いて表せ.
- (4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V(n)}{W(n)}$  を求めよ.