0001785544128999

# 信州大学

2014年 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 座標平面において，$C : y = e^{-x}$ $(x > 0)$ 上の点 $(a,\ e^{-a})$ の接線を $L$ とおき，$L$ と $x$ 軸との交点を A，$L$ と $y$ 軸との交点を B，原点を O とする．三角形 OAB の面積を $S_1$ とし，$y$ 軸，$L$，$C$ で囲まれる図形の面積を $S_2$ とおく．

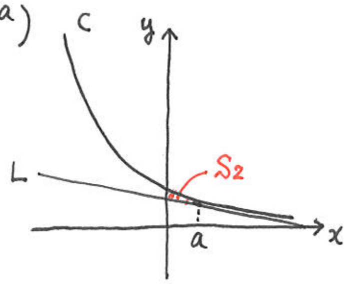
(1) $S_1$，$S_2$ をそれぞれ求めよ．

(2) $a > 0$ のとき，$(a-1)e^a + 1 > 0$ であることを示せ．

(3) $\dfrac{S_2}{S_1}$ を $a$ の関数とみたとき，区間 $(0,\ \infty)$ で単調に増加することを示せ．

(1) $y' = -e^{-x}$ より．$L : y = -e^{-a}(x-a) + e^{-a}$

$0 = -e^{-a}(x-a-1)$ $\therefore A(a+1,\ 0)$ $B(0,\ (a+1)e^{-a})$




$\therefore$ $\underline{S_1 = \frac{1}{2}(a+1)^2 e^{-a}}$ //

$$S_2 = \int_0^a e^{-x} + e^{-a}(x-a) - e^{-a}\,dx$$

$$= \left[ -e^{-x} + \frac{e^{-a}}{2}x^2 - (a+1)e^{-a}x \right]_0^a$$

$$= \underline{1 - \left(\frac{a^2}{2} + a + 1\right)e^{-a}}$$ //

(2) $f(a) = (a-1)e^a + 1$ とおくと，

$$f'(a) = e^a + (a-1)e^a$$

$$= ae^a$$

$\therefore$ $a > 0$ より $f'(a) > 0$ $\therefore$ $f(a)$ は単調増加より $f(a) > f(0) = 0$ ▨

(3) $$\frac{S_2}{S_1} = \frac{1 - \frac{a^2}{2}e^{-a} - (a+1)e^{-a}}{\frac{1}{2}(a+1)^2 e^{-a}} = \underbrace{\frac{2e^a - 1}{(a+1)^2}} - 1$$

この部分を $g(a)$ とおく

$$\therefore\ g'(a) = \frac{2e^a(a+1)^2 - (2e^a - 1)\cdot 2(a+1)}{(a+1)^4}$$

$$= \frac{2\{(a-1)e^a + 1\}}{(a+1)^3}$$

$\therefore$ (2) より $a > 0$ において $g'(a) > 0$ $\therefore$ $\dfrac{S_2}{S_1}$ は $(0,\ \infty)$ で単調増加 ▨