0002349630567999

宮城大学

2016年 第2問

数理 石井K

2 次の問いに答えなさい.

(1) 3次方程式 $x^3 - x^2 + 2x + 3 = 0$ の3つの解を α, β, γ とするとき,

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$$

の値を求めなさい.

(2) 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めなさい.

$$f(x) = x^2 + \int_{-1}^{0} xf(t)\,dt + \int_{0}^{1} f(t)\,dt$$

(1) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma = (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$

$= (\alpha+\beta+\gamma)\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}$

$\therefore \alpha^3+\beta^3+\gamma^3 = (\alpha+\beta+\gamma)\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\} + 3\alpha\beta\gamma \quad \cdots (*)$

解と係数の関係より,

$\alpha+\beta+\gamma = 1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = 2$, $\alpha\beta\gamma = -3$

(*)に代入して, $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 = 1\cdot(1^2-3\cdot2)+3\cdot(-3)$

$= \underline{-14}$ //

(2) $f(x) = x^2 + x\underbrace{\int_{-1}^{0} f(t)\,dt}_{\text{定数}} + \underbrace{\int_{0}^{1} f(t)\,dt}_{\text{定数}}$

よって, $a = \int_{-1}^{0} f(t)\,dt$, $b = \int_{0}^{1} f(t)\,dt$ とおくと, a, b は定数で, $f(x) = x^2 + ax + b$ となる.

$a = \int_{-1}^{0} t^2+at+b\,dt$

$= \left[\frac{t^3}{3} + \frac{a}{2}t^2 + bt\right]_{-1}^{0}$

$= \frac{1}{3} - \frac{a}{2} + b$

$\therefore 3a - 2b = \frac{2}{3} \cdots ①$

$b = \int_{0}^{1} t^2+at+b\,dt$

$= \left[\frac{t^3}{3} + \frac{a}{2}t^2 + bt\right]_{0}^{1}$

$= \frac{1}{3} + \frac{a}{2} + b$

$\therefore a = -\frac{2}{3} \cdots ②$

①, ②より, $a = -\frac{2}{3}$, $b = -\frac{4}{3}$

$\therefore \underline{f(x) = x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}}$ //