



2015年理系第5問

5 自然数 n に対して、関数 $f_n(x)$ を次のように定める.

$$f_1(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t) dt \quad (n \text{ が偶数のとき})$$

$$f_n(x) = 1 - \int_0^x f_{n-1}(t) dt \quad (n \text{ が } 3 \text{ 以上の奇数のとき})$$

次の問いに答えよ. ただし必要があれば, $0 < x \leq 1$ のとき $x - \frac{x^3}{3!} < \sin x < x$ が成り立つことを用いてよい.

(1) 関数 $f_2(x)$, $f_3(x)$ を求めよ.

(2) $0 \leq x \leq 1$ のとき, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$-\frac{x^4}{4!} \leq f_1(x) - \cos x \leq \frac{x^4}{4!}$$

(3) $0 \leq x \leq 1$ のとき, 次の不等式

$$-\frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!} \leq f_{2m-1}(x) - \cos x \leq \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}$$

がすべての自然数 m に対して成り立つことを示せ.

(4) 極限值 $\lim_{m \rightarrow \infty} f_{2m-1}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ を求めよ.