



2013年理学部第3問

3 関数  $f(x) = xe^{-x}$  について、実数  $a, b$  は次の条件を満たすものとする。

(A)  $\int_0^1 f(x) dx = f(a)$  ( $0 < a < 1$ ),

(B)  $f(1) - f(0) = f'(b)$  ( $0 < b < 1$ )

また、点  $(0, 0)$ ,  $(a, e^a)$  を通る直線を  $l_1$  とし、点  $(1, 0)$ ,  $(b, e^b)$  を通る直線を  $l_2$  とする。

(1) (A), (B) を利用して、 $l_1, l_2$  の方程式を  $a, b$  を用いずに表せ。

(2)  $l_1$  と  $l_2$  の交点を求めよ。さらに、曲線  $y = e^x$  上の点  $(1, e)$  における接線と直線  $l_2$  の交点を求めよ。

(3) 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$a < \frac{e-2}{e-1} < b < \frac{1}{2}$$

ただし、必要ならば  $e = 2.718\cdots$ ,  $\log(e-1) = 0.541\cdots$  を用いてよい。