0000216093879999

高知工科大学

2011年第4問

数理 石井K

4 次の各問に答えよ．

(1) $x>0$ のとき，不等式 $e^x > 1+x+\frac{x^2}{2}$ が成り立つことを証明せよ．

(2) $\lim_{x\to\infty} xe^{-x}=0$ を証明せよ．

(3) 関数 $y=xe^{-x}$ の増減・凹凸を調べ，そのグラフを描け．

(4) n を自然数とする．$I_n=\int_0^n xe^{-x}\,dx$ を計算し，$\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ．

(1) $f(x)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2}$ とおくと．

$f'(x)=e^x-1-x$, $f''(x)=e^x-1>0$ （$\because x>0$ より）

$\therefore$ $f'(x)$ は単調増加で，$f'(x)>f'(0)=0$

$\therefore$ $f(x)$ は単調増加で，$f(x)>f(0)=0$ $\therefore$ $x>0$ のとき $f(x)>0$

したがって，$x>0$ のとき．$e^x>1+x+\frac{x^2}{2}$ ■

(2) (1)より．$x>0$ のとき．$e^{-x}<\frac{1}{1+x+\frac{x^2}{2}}$ $\therefore$ $xe^{-x}<\frac{x}{1+x+\frac{x^2}{2}}$

$0<xe^{-x}<\frac{1}{\frac{1}{x}+1+\frac{x}{2}}$ （右辺）は $x\to\infty$ のとき．（右辺）$\to 0$

はさみうちの原理より．$\lim_{x\to\infty} xe^{-x}=0$ ■

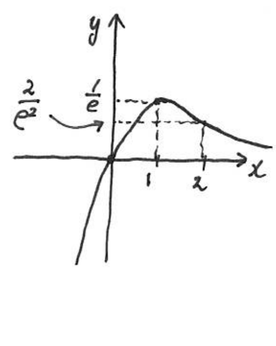
(3) $y'=1\cdot e^{-x}+x\cdot(-e^{-x})=(1-x)e^{-x}$

$y''=-e^{-x}-(1-x)e^{-x}=(x-2)e^{-x}$

$\lim_{x\to-\infty} xe^{-x}=-\infty$ $\therefore$ 右のグラフになる

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{2}{e^2}$	↘

極大　変曲点



(4) $I_n=\int_0^n x(-e^{-x})'\,dx$

$=\left[-xe^{-x}\right]_0^n-\int_0^n -e^{-x}\,dx$

$=-ne^{-n}-\left[e^{-x}\right]_0^n$

$=\underline{1-(n+1)e^{-n}}$ //

$\lim_{n\to\infty} I_n=\lim_{n\to\infty} 1-\frac{n}{e^n}-\frac{1}{e^n}=\underline{1}$ //

(2)より．