長崎大学

2015年 医学部 第4問

1枚目／2枚

数理 石井K

4 自然対数の底を e とする．区間 $x \geqq 0$ 上で定義される関数

$$f(x) = e^{-x}\sin x$$

を考え，曲線 $y = f(x)$ と x 軸との交点を，x 座標の小さい順に並べる．それらを，P_0，P_1，P_2，$\cdots$ とする．点 P_0 は原点である．

自然数 n（$n = 1, 2, 3, \cdots$）に対して，線分 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$ と $y = f(x)$ で囲まれた図形の面積を S_n とする．以下の問いに答えよ．

(1) 点 P_n の x 座標を求めよ．

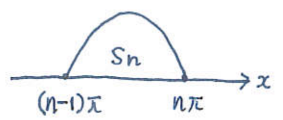
(2) 面積 S_n を求めよ．

(3) $I_n = \sum_{k=1}^{n} S_k$ とする．このとき，I_n と $\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ．

(1) $f(x)=0$ となるのは，$e^{-x}>0$ より，$x=0, \pi, 2\pi, 3\pi, \cdots$

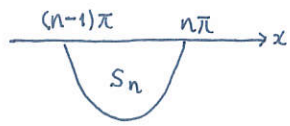
よって，点 P_n の x 座標は，$\underline{n\pi}$ //

(i) n：奇数のとき．



(2) 右の図より，(i)，(ii) どちらの場合も

(ii) n：偶数のとき．



$$S_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |f(x)|\,dx = \left|\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} f(x)\,dx\right|$$

ここで，
$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} f(x)\,dx = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} (-e^{-x})' \sin x\,dx$$
$$= \left[-e^{-x}\sin x\right]_{(n-1)\pi}^{n\pi} - \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} (e^{-x})' \cos x\,dx$$
$$= -\left[e^{-x}\cos x\right]_{(n-1)\pi}^{n\pi} - \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x}\sin x\,dx$$

$$\therefore \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} f(x)\,dx = -\frac{1}{2}\left(e^{-n\pi}\cos n\pi - e^{-(n-1)\pi}\cos(n-1)\pi\right)$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\left(e^{-n\pi} + e^{-(n-1)\pi}\right) & (n:\text{奇数}) \\ -\frac{1}{2}\left(e^{-n\pi} + e^{-(n-1)\pi}\right) & (n:\text{偶数}) \end{cases}$$

以上より，$\underline{S_n = \frac{1}{2}\left\{e^{-n\pi} + e^{-(n-1)\pi}\right\}}$ //

0002113096887999

長崎大学

2015年 医学部 第4問　　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{4}$ 自然対数の底を e とする．区間 $x \geqq 0$ 上で定義される関数

$$f(x) = e^{-x}\sin x$$

を考え，曲線 $y = f(x)$ と x 軸との交点を，x 座標の小さい順に並べる．それらを，P_0，P_1，P_2，$\cdots$ とする．点 P_0 は原点である．

自然数 n ($n = 1, 2, 3, \cdots$) に対して，線分 $P_{n-1}P_n$ と $y = f(x)$ で囲まれた図形の面積を S_n とする．以下の問いに答えよ．

(1) 点 P_n の x 座標を求めよ．

(2) 面積 S_n を求めよ．

(3) $I_n = \sum_{k=1}^{n} S_k$ とする．このとき，I_n と $\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ．

(3) (2)より，$S_n = \dfrac{e^{-n\pi}}{2}\cdot(1+e^{\pi})$

これは，初項 $S_1 = \dfrac{e^{-\pi}}{2}\cdot(1+e^{\pi})$，公比 $e^{-\pi}$ の等比数列なので，

$$I_n = \frac{\frac{e^{-\pi}}{2}(1+e^{\pi})\left\{1-(e^{-\pi})^n\right\}}{1-e^{-\pi}}$$

$$= \underline{\frac{(1+e^{-\pi})(1-e^{-n\pi})}{2(1-e^{-\pi})}}_{\,/\!/}$$

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \frac{1+e^{-\pi}}{2(1-e^{-\pi})} = \underline{\frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}}_{\,/\!/}$$