



2017年 歯学・工学部 第4問

4  $xy$  平面上に放物線  $C: y = x^2$  と直線  $l: y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$  がある.  $t > 0$  とし,  $l$  上を動く点  $P\left(t, \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\right)$  から  $C$  に接線を引く. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 点  $P$  を通り, 傾き  $m$  の直線が  $C$  に接するとき,  $m$  が満たす 2 次方程式を求めよ. さらに, この 2 次方程式は, 常に異なる 2 つの実数解をもつことを示せ.
- (2) (1) で求めた 2 次方程式の解を  $m_1, m_2$  ( $m_1 < m_2$ ) とする. このとき,  $m_1 + m_2, m_1 m_2, m_2 - m_1$  を, それぞれ  $t$  の式で表せ.
- (3) 傾き  $m_1, m_2$  の 2 本の接線が  $x$  軸の正の向きとなす角を, それぞれ  $\theta_1, \theta_2$  ( $-\frac{\pi}{2} < \theta_1 < \theta_2 < \frac{\pi}{2}$ ) とする. このとき,  $m_1 = \tan \theta_1, m_2 = \tan \theta_2$  を利用して  $\tan(\theta_2 - \theta_1)$  を  $t$  の式で表せ. さらに, この式を  $f(t)$  とおくと, 極限值  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  を求めよ.
- (4)  $t > 0$  であることに注意して, (3) の関数  $f(t)$  の最小値と, そのときの  $t$  の値および  $\theta_2 - \theta_1$  の値を求めよ.