2014年 経済・水産・環境科学部 第2問

$\boxed{2}$ $\triangle$ABCにおいて，AB＝5，BC＝7，CA＝6とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とおく．次の問いに答えよ．

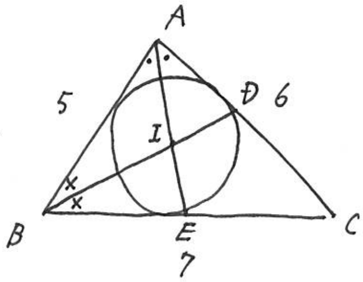
(1) $\triangle$ABCの内心をIとする．$\angle$Aの2等分線と$\angle$Bの2等分線は点Iで交わる．$\angle$Bの2等分線と辺ACの交点をDとするとき，AD : DCとBI : IDを求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$を $\vec{b}$ と $\vec{c}$ を用いて表せ．

(3) $\angle\mathrm{A}=\theta$とする．$\cos\theta$と内積 $\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求めよ．

(4) 実数x，yを用いて$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=x\vec{b}+y\vec{c}$ と表される点Pを考える．点Pが辺ABの垂直2等分線上にあるとき，xとyが満たす関係式を求めよ．

(5) $\triangle$ABCの外心をOとする．辺ABの垂直2等分線と辺ACの垂直2等分線は点Oで交わる．$\overrightarrow{\mathrm{AO}}$を $\vec{b}$ と $\vec{c}$ を用いて表せ．



(1) $\underline{AD : DC = AB : BC = 5 : 7}$ //

同様にして∠Aの2等分線とBCの交点をEとおくと

$BE : EC = AB : AC = 5 : 6$

∴ メネラウスの定理より $\dfrac{BE}{EC}\cdot\dfrac{AC}{AD}\cdot\dfrac{ID}{BI}=1$

∴ $\dfrac{ID}{BI}=\dfrac{1}{2}$　　∴ $\underline{BI : ID = 2 : 1}$ //

(2) (1)より $\overrightarrow{AI}=\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{5}{12}\vec{c}=\underline{\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{5}{18}\vec{c}}$ //

(3) 余弦定理より．$7^2=5^2+6^2-2\cdot5\cdot6\cdot\cos\theta$　　∴ $\underline{\cos\theta=\dfrac{1}{5}}$ //

∴ $\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos\theta=5\cdot6\cdot\dfrac{1}{5}=\underline{6}$ //

(4) 線分ABの中点をMとおくと．$\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\vec{b}$　　∴ $\overrightarrow{MP}=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\vec{b}+y\vec{c}$

$\vec{b}\cdot\overrightarrow{MP}=0$ より．$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)|\vec{b}|^2+y\vec{b}\cdot\vec{c}=0$　∴ $\underline{50x+12y-25=0}$ //

(5) (4)と同様にACの中点をNとおくと．$\overrightarrow{AN}=\dfrac{1}{2}\vec{c}$

$\overrightarrow{AQ}=\quad\vec{b}+\quad\vec{c}$　とおいて．QがACの垂直2等分線となるときを考える．

$\vec{c}\cdot\overrightarrow{NQ}=0$ より．　$x+6y-3=0$　これと(4)の答えを連立させて．

$x=\dfrac{19}{48}$，$y=\dfrac{125}{288}$　　∴ $\underline{\overrightarrow{AO}=\dfrac{19}{48}\vec{b}+\dfrac{125}{288}\vec{c}}$ //