0001934275608999

長崎大学

2014年 医学部 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 1から$2n$までの偶数の平方の和をa_n，奇数の平方の和をb_nとする．すなわち

$$a_n = 2^2 + 4^2 + \cdots + (2n)^2, \quad b_n = 1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2$$

である．なお，1からnまでの自然数の平方の和については

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

が成り立つ．次の問いに答えよ．

(1) 偶数の平方の和$2^2 + 4^2 + \cdots + 20^2$と奇数の平方の和$1^2 + 3^2 + \cdots + 19^2$を求めよ．

(2) a_nとb_nを求めよ．

(3) $\dfrac{1}{a_n} - \dfrac{3}{2n(2n+1)}$および$\dfrac{1}{b_n} + \dfrac{3}{2n(2n+1)}$を計算せよ．

(4) $c_n = \dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{b_n}$とするとき，$S_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$を求めよ．

(1) $2^2+4^2+\cdots+20^2 = \sum_{k=1}^{10}(2k)^2 = 4\cdot\frac{1}{6}\cdot10\cdot11\cdot21 = \underline{1540}$ //

$1^2+3^2+\cdots+19^2 = \sum_{k=1}^{10}(2k-1)^2 = 4\sum_{k=1}^{10}k^2 - 4\sum_{k=1}^{10}k + \sum_{k=1}^{10}1 = \underline{1330}$ //

(2) (1)と同様にして．

$$a_n = \sum_{k=1}^{n}(2k)^2 = 4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \underline{\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}} \ //$$

$$b_n = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = 4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 4\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + n = \underline{\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}} \ //$$

(3)
$$\frac{1}{a_n} - \frac{3}{2n(2n+1)} = \frac{3-3(n+1)}{2n(2n+1)(n+1)} = \underline{-\frac{3}{2(n+1)(2n+1)}} \ //$$

$$\frac{1}{b_n} + \frac{3}{2n(2n+1)} = \frac{6+3(2n-1)}{2n(2n+1)(2n-1)} = \underline{\frac{3}{2n(2n-1)}} \ //$$

(4)
$$c_n = \frac{3}{2n(2n-1)} - \frac{3}{2(n+1)(2n+1)}$$

$$\therefore S_n = \frac{3}{2}\left\{\frac{1}{1\cdot1} - \cancel{\frac{1}{2\cdot3}} + \cancel{\frac{1}{2\cdot3}} - \cancel{\frac{1}{3\cdot5}} + \cancel{\frac{1}{3\cdot5}} - \cancel{\frac{1}{4\cdot7}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{n(2n-1)}} - \frac{1}{(n+1)(2n+1)}\right\}$$

$$= \frac{3}{2}\left\{1 - \frac{1}{(n+1)(2n+1)}\right\}$$

$$= \underline{\frac{3n(2n+3)}{2(n+1)(2n+1)}} \ //$$