0001935274608999

長崎大学

2014年 教育・薬学部 第4問　　1枚目／2枚

数理 石井K

4 次の問いに答えよ．

(1) $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\tan x=t$ とおく．$\cos 2x$ と $\dfrac{dx}{dt}$ を t で表せ．

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{2-\cos 2x}\,dx$ を求めよ．

(3) 関数 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ の逆関数を求めよ．

(4) $x=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$ とおくことにより，$\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ を求めよ．

(1) $\tan^2 x+1=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ より $\cos^2 x=\dfrac{1}{1+t^2}$

$\cos 2x=2\cos^2 x-1$　　$\therefore \underline{\cos 2x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}$ //

$\tan x=t$ の両辺を t で微分して，$\dfrac{d}{dt}\tan x=1$

$\therefore \dfrac{dx}{dt}\cdot\dfrac{d}{dx}\cdot\tan x=1$　　$\therefore \dfrac{dx}{dt}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}=1$　　$\therefore \dfrac{dx}{dt}=\cos^2 x$

$\therefore \underline{\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{1+t^2}}$ //

(2) $\tan x=t$ とおいて置換積分する．

x	$0\to\frac{\pi}{4}$
t	$0\to 1$

(1)より．

$$(与式)=\int_0^1\frac{t}{2-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{dt}{1+t^2}$$

$$=\int_0^1\frac{6t}{3t^2+1}\cdot\frac{1}{6}\,dt$$

$$=\frac{1}{6}\Big[\log(3t^2+1)\Big]_0^1$$

$$=\frac{1}{6}\log 4$$

$$=\underline{\frac{1}{3}\log 2}\ //$$

(3) $x=\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}$ として

$e^y-e^{-y}=2x$　両辺 e^y をかけて

$(e^y)^2-2xe^y-1=0$

$\therefore e^y=\dfrac{2x+\sqrt{4x^2+4}}{2}$　$(e^y>0$ より$)$

$\therefore e^y=x+\sqrt{x^2+1}$

$\therefore \underline{y=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}$ //

長崎大学

2014年 教育・薬学部 第4問

2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{4}$ 次の問いに答えよ．

(1) $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\tan x = t$ とおく．$\cos 2x$ と $\dfrac{dx}{dt}$ を t で表せ．

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{2-\cos 2x}\,dx$ を求めよ．

(3) 関数 $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ の逆関数を求めよ．

(4) $x = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ とおくことにより，$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ を求めよ．

(4) $dx = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2} \cdot dt$

$$\therefore (与式) = \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 + 1}} \cdot \frac{e^t + e^{-t}}{2}\,dt$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2}} \cdot \frac{e^t + e^{-t}}{2}\,dt$$

$$= \int \frac{2}{e^t + e^{-t}} \cdot \frac{e^t + e^{-t}}{2}\,dt$$

$$= \int dt$$

$$= t + C$$

(3) より

$$= \underline{\log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C} \quad (Cは積分定数)$$