0002011098897999

長崎大学

2015年 医学部 第2問　　1枚目／2枚

数理 石井K

2 ひし形の紙がある（図1）．点線で半分に折ると正三角形になった（図2）．これを少し開いて机の上に立てると，三角錐の形になる（図3）．その高さを次のようにして求めたい．

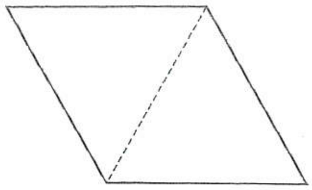

図1

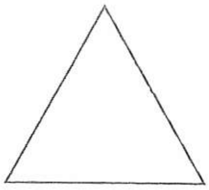

図2

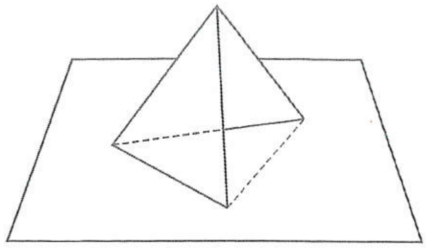

図3

(1) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ //

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$

$= -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ //

(2) △OAB と △OAC は，1辺の長さが1の正三角形 より，

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c} = 1\cdot 1\cdot\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ //

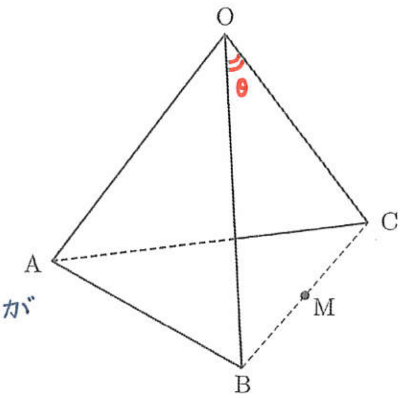

図4 (図3の拡大図)

(2) のつづき．

$|\vec{b}+\vec{c}|^2 = |\vec{b}|^2 + 2\vec{b}\cdot\vec{c} + |\vec{c}|^2$

$= 2 + 2|\vec{b}||\vec{c}|\cdot\cos\theta$

$= 2 + 2\cos\theta$ //

図4において，2つの正三角形OABとOACの1辺の長さを1とする．点Oと平面ABCの距離が，三角錐OABCの高さになる．空間ベクトルを利用してこの高さを求める．$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$，$\overrightarrow{OC} = \vec{c}$，$\angle BOC = \theta$ とおき，線分BCの中点をMとする．以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{OM}$ と $\overrightarrow{AM}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ と $\vec{a}\cdot\vec{c}$ の値を求めよ．また，$|\vec{b}+\vec{c}|^2$ の値を $\cos\theta$ を用いて表せ．

(3) 実数 t に対して $\overrightarrow{OH} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OM}$ とおくと，点Hは直線AM上にある．このとき，$\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{BC}$ が成り立つことを示せ．さらに，Hが $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AM}$ を満たす点であるとき，t の値を $\cos\theta$ を用いて表せ．

(4) 三角錐OABCの高さを h とする．h を $\cos\theta$ を用いて表せ．さらに，$\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{AM}$ が成り立つとき，θ と h の値を求めよ．

(3) $\overrightarrow{OH} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OM}$

$= (1-t)\vec{a} + \frac{1}{2}t\vec{b} + \frac{1}{2}t\vec{c}$

$\therefore \overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{BC} = \left\{(1-t)\vec{a} + \frac{1}{2}t\vec{b} + \frac{1}{2}t\vec{c}\right\}\cdot(\vec{c}-\vec{b})$

$= (1-t)\vec{a}\cdot\vec{c} - (1-t)\vec{a}\cdot\vec{b} - \frac{1}{2}t|\vec{b}|^2 + \frac{1}{2}t|\vec{c}|^2$

$= 0$ （∵ (2)より）

よって，$\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{BC}$ ▨

数理 石井K

(3) のつづき.

$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AM} = \left\{(1-t)\vec{a} + \frac{1}{2}t\vec{b} + \frac{1}{2}t\vec{c}\right\}\cdot\left(-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right)$$

$$= -(1-t)|\vec{a}|^2 + \left\{\frac{1}{2}(1-t) - \frac{1}{2}t\right\}\vec{a}\cdot\vec{b} + \left\{\frac{1}{2}(1-t) - \frac{1}{2}t\right\}\vec{a}\cdot\vec{c}$$

$$+ \frac{1}{4}t|\vec{b}|^2 + \frac{1}{4}t|\vec{c}|^2 + 2\cdot\frac{1}{4}t\,\vec{b}\cdot\vec{c}$$

$$= t-1 + \left(\frac{1}{2}-t\right)\cdot\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}-t\right)\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}t + \frac{1}{4}t + \frac{1}{2}t\cos\theta$$

$$= \frac{1}{2}t(1+\cos\theta) - \frac{1}{2}$$

$\therefore$ $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AM}$ のとき, $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AM} = 0$ であるから. $\underline{t = \dfrac{1}{1+\cos\theta}}$ //

(4) 点Oから平面ABCに下ろした垂線と平面ABCの交点をH′とおくと.

$\overrightarrow{OH'} \perp$ 平面ABC より, $\overrightarrow{OH'} \perp \overrightarrow{AM}$ かつ $\overrightarrow{OH'} \perp \overrightarrow{BC}$

$\therefore$ H′は (3) で考えた H であるから.

$|\overrightarrow{OH}| = h$ となる.

$$|\overrightarrow{OH}|^2 = (1-t)^2|\vec{a}|^2 + \frac{1}{4}t^2|\vec{b}|^2 + \frac{1}{4}t^2|\vec{c}|^2 + t(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b} + t(1-t)\vec{a}\cdot\vec{c} + \frac{1}{2}t^2\,\vec{b}\cdot\vec{c}$$

$$= t^2 - 2t + 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}(t-t^2) + \frac{1}{2}(t-t^2) + \frac{1}{2}t^2\cos\theta$$

$$= \frac{1}{2}t^2(1+\cos\theta) - t + 1$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+\cos\theta)^2}\cdot(1+\cos\theta) - \frac{1}{1+\cos\theta} + 1$$

$$= \frac{1+2\cos\theta}{2(1+\cos\theta)}$$

$\therefore$ $\underline{h = \sqrt{\dfrac{1+2\cos\theta}{2(1+\cos\theta)}}}$ //

$$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM}\cdot(\overrightarrow{OM} - \vec{a}) = |\overrightarrow{OM}|^2 - \overrightarrow{OM}\cdot\vec{a} = \underbrace{\frac{1+\cos\theta}{2} - \frac{1}{2}}_{} = \frac{1}{2}\cos\theta$$

(1)を使って計算した

$\therefore$ $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{AM}$ のとき $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AM} = 0$ $\therefore$ $\underline{\theta = \dfrac{\pi}{2}}$ //

このとき, $\underline{h = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$ //