長崎大学

2016年 医学部 第3問　1枚目/2枚

3 関数 $f(x) = xe^x$ で定まる曲線 $C : y = f(x)$ を考える．p を正の数とする．以下の問いに答えよ．

(1) $f'(x)$ と $f''(x)$ を求めよ．また，すべての x について

$$\{(ax+b)e^x\}' = f(x)$$

が成り立つような定数 a, b の値を求めよ．

(2) 曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における C の接線を $\ell : y = c(x-p)+d$ とする．c と d の値を p を用いて表せ．さらに，区間 $x \geqq 0$ において関数 $g(x) = f(x) - \{c(x-p)+d\}$ の増減を調べ，不等式

$$f(x) \geqq c(x-p)+d \quad (x \geqq 0)$$

が成り立つことを示せ．

(3) $x \geqq 0$ の範囲で，曲線 C と接線 ℓ，および y 軸で囲まれた図形を F とする．その面積 $S(p)$ を求めよ．

(4) 2辺が x 軸，y 軸に平行な長方形 R を考える．R が図形 F を囲んでいるとき，R の面積の最小値 $T(p)$ を求めよ．さらに，$\displaystyle\lim_{p\to\infty}\frac{S(p)}{T(p)}$ を求めよ．

(1) $f'(x) = 1\cdot e^x + xe^x$　$\therefore\ \underline{f'(x) = (x+1)e^x}$ //

$f''(x) = 1\cdot e^x + (x+1)e^x$　$\therefore\ \underline{f''(x) = (x+2)e^x}$ //

$$\{(ax+b)e^x\}' = ae^x + (ax+b)e^x$$
$$= (ax+a+b)e^x$$

$\therefore\ (ax+a+b)e^x = xe^x$ これがxについての恒等式より．$\underline{a=1,\ b=-1}$ //

(2) $\ell : y = (p+1)e^p\cdot(x-p) + pe^p$ より．$\underline{c = (p+1)e^p,\ d = pe^p}$ //

$g'(x) = f'(x) - c$
$\quad = (x+1)e^x - (p+1)e^p$

これは単調増加で $g'(p) = 0$ より．

$0 \leqq x < p$ では．$g'(x) < 0$，　$x > p$ では $g'(x) > 0$

x	0	$\cdots$	p	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		↘		↗

$\therefore$ 右の増減表より．$g(x)$ の最小値は $g(p) = 0$

$\therefore\ x \geqq 0$ において．$g(x) \geqq 0$

すなわち．$f(x) \geqq c(x-p)+d\ \ (x \geqq 0)$ ▨

2016年 医学部 第3問　　2枚目／2枚

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)=xe^x$ で定まる曲線 $C : y=f(x)$ を考える．p を正の数とする．以下の問いに答えよ．

(1) $f'(x)$ と $f''(x)$ を求めよ．また，すべての x について

$$\{(ax+b)e^x\}'=f(x)$$

が成り立つような定数 a，b の値を求めよ．

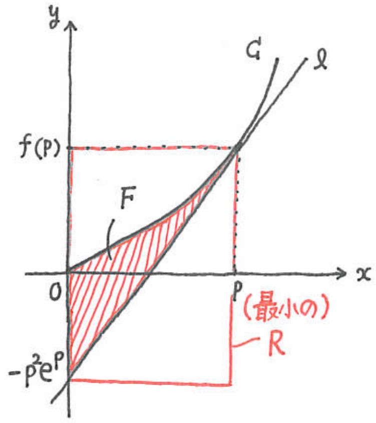
(2) 曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における C の接線を $\ell : y=c(x-p)+d$ とする．c と d の値を p を用いて表せ．さらに，区間 $x \geqq 0$ において関数 $g(x)=f(x)-\{c(x-p)+d\}$ の増減を調べ，不等式

$$f(x) \geqq c(x-p)+d \quad (x \geqq 0)$$

が成り立つことを示せ．

(3) $x \geqq 0$ の範囲で，曲線 C と接線 ℓ，および y 軸で囲まれた図形を F とする．その面積 $S(p)$ を求めよ．

(4) 2辺が x 軸，y 軸に平行な長方形 R を考える．R が図形 F を囲んでいるとき，R の面積の最小値 $T(p)$ を求めよ．さらに，$\displaystyle\lim_{p\to\infty}\frac{S(p)}{T(p)}$ を求めよ．



(3) $S(p)=\int_0^p xe^x-\{c(x-p)+d\}\,dx$

$=\int_0^p x(e^x)'\,dx-\int_0^p\{c(x-p)+d\}\,dx$

$=\left[xe^x\right]_0^p-\int_0^p e^x\,dx-\left[\frac{c}{2}(x-p)^2+dx\right]_0^p$

$=pe^p-\left[e^x\right]_0^p-dp+\frac{c}{2}p^2$

$=pe^p-e^p+1-p^2e^p+\frac{1}{2}p^2(p+1)e^p$

$=\underline{\frac{1}{2}e^p(p-1)(p^2+2)+1}$ //

(4) 右図より．$T(p)=(pe^p+p^2e^p)\times p$

$=\underline{e^p\cdot p^2(p+1)}$ //

$$\lim_{p\to\infty}\frac{S(p)}{T(p)}=\lim_{p\to\infty}\frac{(1-\frac{1}{p})(1+\frac{2}{p^2})+\frac{2}{e^p\cdot p^3}}{2(1+\frac{1}{p})}$$

$=\underline{\frac{1}{2}}$ //