



2010年第5問

5 a, b を $a > b > 0$ を満たす定数とし,

$$\begin{cases} a_1 = a, & a_{n+1} = a_n^2 + b_n^2 & (n = 1, 2, 3, \dots) \\ b_1 = b, & b_{n+1} = 2a_n b_n & (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

で定義される数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を考える. 次の問いに答えよ.

- (1) 数列 $\{c_n\}$ を $c_n = a_n + b_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) により定義するとき, その一般項 c_n を a, b を用いて表せ.
- (2) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項 a_n, b_n を a, b を用いて表せ.
- (3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n}$ が存在するかどうかを調べ, 存在する場合はその値を求めよ.
- (4) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとき, $a + b < 1$ が成り立つことを証明せよ.