

2015年 歯学・工学部 第4問

4 実数 $x \neq 1$ について定義される関数

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x}$$

$$(1) f(x) = \frac{-(1-x)+2}{1-x} = \frac{2}{1-x} - 1 = 2(1-x)^{-1} - 1$$

$$\therefore f'(x) = \frac{2}{(1-x)^2} \quad f''(x) = \frac{4}{(1-x)^3}$$

を考える。以下の問いに答えよ。

(1) $f'(x)$ と $f''(x)$ を求めよ。(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ を求めよ。(3) x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。曲線 $y = f(x)$ 上の格子点の座標をすべて求めよ。(4) 関数 $y = f(x)$ のグラフをかけ。(5) $x \leq 0$ かつ $y \geq 0$ で表される領域において、 x 軸と y 軸および曲線 $y = f(x)$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

$$(2) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} + 1}{\frac{1}{x} - 1} = -1 \quad \text{同様に, } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -1$$

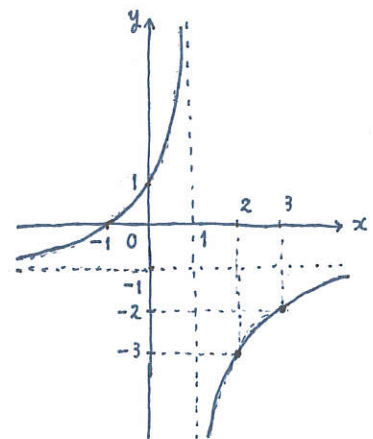
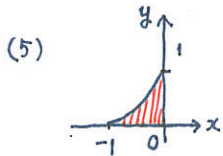
$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1+x}{1-x} = +\infty \quad \text{同様に, } \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = -\infty$$

(3) $y = \frac{2}{1-x} - 1$ より、 x, y がともに整数のとき、 $1-x$ は 2 の約数。

$$\therefore 1-x = -2, -1, 1, 2 \quad \therefore x = 3, 2, 0, -1$$

$$\therefore (x, y) = (3, -2), (2, -3), (0, 1), (-1, 0)$$

(4) (1)~(3) よりグラフをかくと右のようになる。



$$S = \int_{-1}^0 f(x) dx$$

$$= \int_{-1}^0 -2 \cdot \frac{1}{x-1} - 1 dx$$

$$= [-2 \log|x-1| - x]_{-1}^0$$

$$= -1 + 2 \log 2$$