



2017年 医学部 第4問

4  $xy$ 平面上に、原点  $O$  を中心とする半径  $1$  の円がある。この円の周上に  $2$  点  $A(\cos \alpha, \sin \alpha)$  と  $B(\cos \beta, \sin \beta)$  をとる。ただし、 $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$  とする。さらに、 $2$  点  $A, B$  から  $x$  軸に垂線を下ろし、 $x$  軸との交点をそれぞれ  $C, D$  とする。扇形  $OAB$  の面積を  $S_1$ 、弧  $AB$  と線分  $BD, DC, CA$  で囲まれた図形  $F$  の面積を  $S_2$  とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1)  $S_1$  を  $\alpha$  と  $\beta$  で表せ。
- (2)  $S_2$  を  $\alpha$  と  $\beta$  で表せ。
- (3)  $S_1 = S_2$  のとき、 $\beta$  を  $\alpha$  の式で表せ。また、このとき  $t = \cos \alpha - \cos \beta$  のとりうる値の範囲を求めよ。
- (4) (3) のとき、扇形  $OAB$  および図形  $F$  を  $x$  軸のまわりに  $1$  回転してできる回転体の体積を、それぞれ  $V_1$  および  $V_2$  とする。さらに、 $V = V_1 - V_2$  とする。 $V$  を  $t$  の式で表せ。
- (5) (4) において、 $V$  の最大値、およびそのときの  $A, B$  の座標を求めよ。