



2014年理系第4問

4  $p, q$  は実数の定数で,  $0 < p < 1, q > 0$  をみたすとする. 関数

$$f(x) = (1-p)x + (1-x)(1-e^{-qx})$$

を考える.

以下の問いに答えよ. 必要であれば, 不等式  $1+x \leq e^x$  がすべての実数  $x$  に対して成り立つことを証明なしに用いてよい.

- (1)  $0 < x < 1$  のとき,  $0 < f(x) < 1$  であることを示せ.  
(2)  $x_0$  は  $0 < x_0 < 1$  をみたす実数とする. 数列  $\{x_n\}$  の各項  $x_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を,

$$x_n = f(x_{n-1})$$

によって順次定める.  $p > q$  であるとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

となることを示せ.

- (3)  $p < q$  であるとき,

$$c = f(c), \quad 0 < c < 1$$

をみたす実数  $c$  が存在することを示せ.