



2012年理学部（数理）第3問

3 n を自然数とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2$ を求めよ．

(2) $0 < r < 1$ とし， $S_n = 1 + 2r + 3r^2 + \cdots + nr^{n-1}$ とおく．

(i) $S_n - rS_n$ を求めよ．

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n$ を求めよ．

(3) $a > 0$ ， $b > 0$ に対して，不等式

$$a + b - \sqrt{ab} < \sqrt{a^2 + b^2} < a + b$$

が成り立つことを証明せよ．

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{1}{3^{2(k-1)}} + \frac{k^4}{n^6}}$ を求めよ．