



2015年理系第5問

1枚目 / 2枚



5 以下の問いに答えよ.

- (1)  $n$ が正の偶数のとき,  $2^n - 1$ は3の倍数であることを示せ.  
 (2)  $n$ を自然数とする.  $2^n + 1$ と $2^n - 1$ は互いに素であることを示せ.  
 (3)  $p, q$ を異なる素数とする.  $2^{p-1} - 1 = pq^2$ を満たす $p, q$ の組をすべて求めよ.

(1)  $n = 2^k$  ( $k$ は正の整数) とおけるので

$$\begin{aligned} 2^n - 1 &= 2^{2^k} - 1 \\ &= 4^k - 1 \\ &= (4 - 1)(4^{k-1} + 4^{k-2} + \dots + 4 + 1) \\ &= 3 \cdot \sum_{i=0}^{k-1} 4^i \end{aligned}$$

$k-1 \geq 0$  より,  $\sum_{i=0}^{k-1} 4^i$  は整数であり,  $2^n - 1$  は3の倍数  $\square$

(2) 背理法で示す.  $2^n + 1$ と $2^n - 1$ が公約数 $m$  ( $m$ は2以上の整数)をもちと仮定する. このとき,

$$\begin{cases} 2^n + 1 = ma \\ 2^n - 1 = mb \end{cases} \quad (a, b \text{ は正の整数}) \text{ と表せるので, 上式から下式を引いて.}$$

$$2 = m(a - b) \quad a - b \text{ は整数であるから, } m \text{ は2の約数である.}$$

( $>0$ )

$m \geq 2$  より,  $m = 2$  となるが, これは,  $2^n + 1, 2^n - 1$  が奇数であることに矛盾. よって,  $2^n + 1$  と  $2^n - 1$  は互いに素である  $\square$

(3). (i)  $p = 2$  のとき,  $2^1 - 1 = p q^2$  これをみたす,  $p, q$  は存在しない

(ii)  $p \geq 3$  のとき,  $p$  は奇数の素数であるから,  $p-1$  は正の偶数.

$\therefore$  (1) より,  $2^{p-1} - 1$  は3の倍数  $\therefore p = 3$  または  $q = 3$

①  $p = 3$  のとき,  $3 = 3 \cdot q^2$   $q$  は素数より不適.

②  $q = 3$  のとき,  $2^{p-1} - 1 = 9p \quad \therefore (2^{\frac{p-1}{2}} + 1)(2^{\frac{p-1}{2}} - 1) = 9p \quad \dots (*)$

2枚目につづく



2015年理系第5問

2枚目/2枚.

5 以下の問いに答えよ.

- (1)  $n$ が正の偶数のとき,  $2^n - 1$ は3の倍数であることを示せ.  
 (2)  $n$ を自然数とする.  $2^n + 1$ と $2^n - 1$ は互いに素であることを示せ.  
 (3)  $p, q$ を異なる素数とする.  $2^{p-1} - 1 = pq^2$ を満たす $p, q$ の組をすべて求めよ.

(3) のつづき.

 $p=3$ のときは, 不適だったのて.  $p$ : 奇素数より.  $p \geq 5$ 

このとき

$$2^{\frac{p-1}{2}} - 1 \geq 2^2 - 1 = 3$$

また, (2)より,  $2^{\frac{p-1}{2}} + 1$ と $2^{\frac{p-1}{2}} - 1$ は互いに素なので

考えられるのは(\*)式より.

$$\left(2^{\frac{p-1}{2}} + 1, 2^{\frac{p-1}{2}} - 1\right) = (q, p), (p, q) \text{ となる.}$$

$$(i) 2^{\frac{p-1}{2}} + 1 = q, 2^{\frac{p-1}{2}} - 1 = p \text{ のとき.}$$

$$\text{両式を引いて. } 2 = q - p \quad \therefore p = 7.$$

$$\therefore (p, q) = (7, 3) \text{ 逆にこのとき, 与式をみたす.}$$

$$(ii) 2^{\frac{p-1}{2}} + 1 = p, 2^{\frac{p-1}{2}} - 1 = q \text{ のとき.}$$

$$\text{両式を引いて. } 2 = p - q \quad \therefore p = 11.$$

$$\therefore (p, q) = (11, 3) \text{ これは与式をみたさない}$$

$$\text{以上より. } \underline{(p, q) = (7, 3)} //$$