名古屋大学

2013年 第3問

3 k，m，nは整数とし，$n \geqq 1$とする．${}_m\mathrm{C}_k$を二項係数として，$S_k(n)$，$T_m(n)$を以下のように定める．

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k, \quad S_k(1) = 1 \quad (k \geqq 0)$$

$$\begin{aligned} T_m(n) &= {}_m\mathrm{C}_1 S_1(n) + {}_m\mathrm{C}_2 S_2(n) + {}_m\mathrm{C}_3 S_3(n) + \cdots + {}_m\mathrm{C}_{m-1} S_{m-1}(n) \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} {}_m\mathrm{C}_k S_k(n) \quad (m \geqq 2) \end{aligned}$$

(1) $T_m(1)$と$T_m(2)$を求めよ．

(2) 一般のnに対して$T_m(n)$を求めよ．

(3) pが7以上の素数のとき，$S_1(p-1)$，$S_2(p-1)$，$S_3(p-1)$，$S_4(p-1)$はpの倍数であることを示せ．