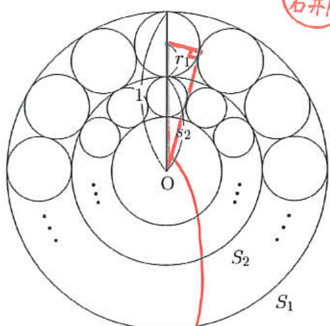
0000388361169999

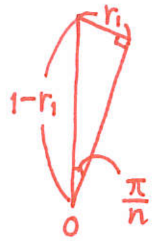
岐阜大学

2011 年 第 4 問

$\boxed{4}$ k，n は自然数で $n \geqq 3$ とする．平面上の点Oを中心とする半径1の円を S_1 とする．右の図のように，半径 r_1 の n 個の円は隣り合う他の2つの円と外接し，かつ S_1 に内接している．さらに，点Oを中心とする円 S_2 は，半径 r_1 のすべての円に外接している．同様に，$k \geqq 2$ に対して，半径 r_k の n 個の円は隣り合う他の2つの円と外接し，かつ円 S_k に内接している．さらに点Oを中心とする円 S_{k+1} は，半径 r_k のすべての円に外接している．S_2 の半径を s_2 とする．以下の問に答えよ．



拡大



(1) r_1 と s_2 を n を用いて表せ．

(2) 半径 r_k の1つの円の面積を $T_k(n)$ とする．$T_k(n)$ を k と n を用いて表せ．

(3) $U(n) = n \sum_{k=1}^{\infty} T_k(n)$ とする．$U(n)$ を求めよ．

(4) $\lim_{n \to \infty} U(n)$ を求めよ．

(1) 右の図より，$\sin\frac{\pi}{n} = \frac{r_1}{1-r_1}$ $\quad \therefore\ \underline{r_1 = \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1+\sin\frac{\pi}{n}}}$ //

また，$2r_1 + s_2 = 1$ より，$s_2 = 1 - \frac{2\sin\frac{\pi}{n}}{1+\sin\frac{\pi}{n}}$ $\quad \therefore\ \underline{s_2 = \frac{1-\sin\frac{\pi}{n}}{1+\sin\frac{\pi}{n}}}$ //

(2) 数列 $\{r_k\}$ は初項 r_1，公比 s_2 の等比数列となるから，(1)より

$$r_k = \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1+\sin\frac{\pi}{n}} \cdot \left(\frac{1-\sin\frac{\pi}{n}}{1+\sin\frac{\pi}{n}}\right)^{k-1} \quad \therefore\ T_k(n) = \pi r_k^2 = \underline{\frac{\pi\sin^2\frac{\pi}{n}}{\left(1+\sin\frac{\pi}{n}\right)^2} \cdot \left(\frac{1-\sin\frac{\pi}{n}}{1+\sin\frac{\pi}{n}}\right)^{2k-2}} \text{ //}$$

(3) $n \geqq 3$ であるから，$T_k(n)$ の 公比 s_2^2 は $0 < |s_2^2| < 1$ をみたす．

$\therefore$ その無限級数の和は収束し，$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(n) = \frac{\pi r_1^2}{1-s_2^2} = \underline{\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{n}}$ //

$\therefore\ \underline{U(n) = \frac{n\pi}{4}\sin\frac{\pi}{n}}$ //

(注) $\{T_k(n)\}$ は初項 πr_1^2，公比 s_2^2 の等比数列である．

(4) $\lim_{n\to\infty} U(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}$

ここで，$\lim_{x\to+0} \frac{\sin x}{x} = 1$ より，$\underline{\lim_{n\to\infty} U(n) = \frac{\pi^2}{4}}$ //

(参考) S_1 の面積は π で，$U(n) = \frac{\pi^2}{4}$ より，

S_1 において小円が占める割合は $\frac{\frac{\pi^2}{4}}{\pi} = \frac{\pi}{4} \fallingdotseq 78.5\%$ と分かる

充填率とかと呼ばれる