



2014年 第3問

3 xy 平面の $y \geq 0$ の部分にあり, x 軸に接する円の列 C_1, C_2, C_3, \dots を次のように定める.

- C_1 と C_2 は半径 1 の円で, 互いに外接する.
- 正の整数 n に対し, C_{n+2} は C_n と C_{n+1} に外接し, C_n と C_{n+1} の弧および x 軸で囲まれる部分にある.

円 C_n の半径を r_n とする.

(1) 等式 $\frac{1}{\sqrt{r_{n+2}}} = \frac{1}{\sqrt{r_n}} + \frac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}$ を示せ.

(2) すべての正の整数 n に対して $\frac{1}{\sqrt{r_n}} = s\alpha^n + t\beta^n$ が成り立つように, n によらない定数 α, β, s, t の値を一組与えよ.

(3) $n \rightarrow \infty$ のとき数列 $\left\{ \frac{r_n}{k^n} \right\}$ が正の値に収束するように実数 k の値を定め, そのときの極限値を求めよ.