

2018年第1問

1 自然数  $n$  に対し, 定積分  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1} dx$  を考える. このとき, 次の問に答えよ.

(1)  $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$  を示せ.

(2)  $0 \leq I_{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$  を示せ.

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n$  を求めよ.

(4)  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k}$  とする. このとき (1), (2) を用いて  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  を求めよ.