岡山県立大学

2013年 第2問　　1枚目/2枚.

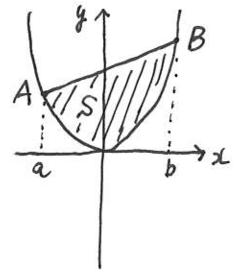
数理 石井K

$\boxed{2}$ 放物線 $C: y = x^2$ 上に2点 $A(a,\ a^2)$，$B(b,\ b^2)$ がある．ただし，$a < b$ とする．放物線 C と線分 AB が囲む部分の面積を S とする．次の問いに答えよ．

(1) $S = \dfrac{(b-a)^3}{6}$ であることを示せ．

(2) 2点 A，B を固定する．放物線 C 上の点 $P(t,\ t^2)$ に対して，放物線 C と線分 AP が囲む部分の面積を S_1，放物線 C と線分 BP が囲む部分の面積を S_2 とする．$a < t < b$ のとき，$S_1 + S_2$ の最小値を求めよ．

(3) 常に $S = \dfrac{9}{2}$ であるように，2点 A，B が放物線 C 上を動く．このとき，線分 AB の中点の軌跡の方程式を求めよ．



(1) $S = \int_a^b \dfrac{b^2-a^2}{b-a}(x-a) + a^2 - x^2\, dx$

$= \int_a^b -x^2 + (a+b)x - ab\, dx$

$= -\int_a^b (x-a)(x-b)\, dx$

$t = x - a$ とおくと

$S = -\int_0^{b-a} t(t+a-b)\, dt$

$= -\left[\dfrac{t^3}{3} + \dfrac{a-b}{2}t^2\right]_0^{b-a}$

$= -\dfrac{(b-a)^3}{3} + \dfrac{(b-a)^3}{2}$

$= \dfrac{(b-a)^3}{6}$ ■

(2) (1)を用いると，

$S_1 = \frac{1}{6}(t-a)^3$，$S_2 = \frac{1}{6}(b-t)^3$

$\therefore S_1 + S_2 = f(t)$ とおくと

$f(t) = \frac{1}{6}(t-a)^3 + \frac{1}{6}(b-t)^3$

$\therefore f'(t) = \frac{1}{2}(t-a)^2 - \frac{1}{2}(b-t)^2$

$= \frac{1}{2}(b-a)\cdot(2t-a-b)$

$\therefore f'(t) = 0$ となるのは $t = \dfrac{a+b}{2}$ のとき

t	(a)	$\cdots$	$\frac{a+b}{2}$	$\cdots$	(b)
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘		↗	

$\therefore S_1 + S_2$ の最小値は

$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 + \frac{1}{6}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3$

$= \dfrac{(b-a)^3}{24}$ //　$\left(t = \dfrac{a+b}{2}\text{ のとき}\right)$

0001414725858999

岡山県立大学

2013 年 第 2 問　　2枚目／2枚

数理石#K

$\boxed{2}$ 放物線 $C : y = x^2$ 上に 2 点 A$(a,\ a^2)$，B$(b,\ b^2)$ がある．ただし，$a < b$ とする．放物線 C と線分 AB が囲む部分の面積を S とする．次の問いに答えよ．

(1) $S = \dfrac{(b-a)^3}{6}$ であることを示せ．

(2) 2 点 A，B を固定する．放物線 C 上の点 P$(t,\ t^2)$ に対して，放物線 C と線分 AP が囲む部分の面積を S_1，放物線 C と線分 BP が囲む部分の面積を S_2 とする．$a < t < b$ のとき，$S_1 + S_2$ の最小値を求めよ．

(3) 常に $S = \dfrac{9}{2}$ であるように，2 点 A，B が放物線 C 上を動く．このとき，線分 AB の中点の軌跡の方程式を求めよ．

(3)

(1) より $\dfrac{(b-a)^3}{6} = \dfrac{9}{2}$　　$\therefore (b-a)^3 = 27$

$b-a>0$ より．　$b-a = 3$ ・・・ (＊)

また，AB の中点を M とおくと．$M\left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{a^2+b^2}{2}\right)$ であり

この座標を (X, Y) で表すと．

$$\begin{cases} X = \frac{1}{2}(a+b) \\ Y = \frac{1}{2}(a^2+b^2) \end{cases} \overset{(＊)を使うと.}{\iff} \begin{cases} X = \frac{1}{2}(2a+3) & \cdots ① \\ Y = \frac{1}{2}(2a^2+6a+9) & \cdots ② \end{cases}$$

①式を $a = X - \frac{3}{2}$ として ② に代入すると．$Y = X^2 + \frac{9}{4}$

∴求める軌跡は $\underline{放物線\ y = x^2 + \frac{9}{4}}$ //