0001642817538999

東京工業大学

2014年 第1問

$\boxed{1}$ 3以上の奇数 n に対して，a_n と b_n を次のように定める．

$$a_n = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)k(k+1), \quad b_n = \frac{n^2-1}{8}$$

(1) a_n と b_n はどちらも整数であることを示せ．

(2) $a_n - b_n$ は4の倍数であることを示せ．

(1) $a_n = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1} k^3 - k$

$= \frac{1}{6}\left\{\frac{1}{2}(n-1)n\right\}^2 - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}(n-1)n$

$= \frac{1}{24}n^2(n-1)^2 - \frac{1}{12}n(n-1)$

$= \frac{1}{24}n(n-1)\{n(n-1)-2\}$

$= \frac{1}{24}(n-2)(n-1)n(n+1)$

ここで，$(n-2)(n-1)n(n+1)$ は

連続する4つの整数の積なので，

8 ~~4~~ の倍数かつ 3の倍数

すなわち 24の倍数

$\therefore$ a_n は整数

$b_n = \frac{(n-1)(n+1)}{8}$

ここで，n は奇数なので

$n = 2k+1$ （k は正の整数）

とおくと，

$b_n = \frac{2k\cdot(2k+2)}{8}$

$= \frac{k(k+1)}{2}$

$k(k+1)$ は連続する整数の積

なので，$k(k+1)$ は偶数

$\therefore$ b_n は整数

(2) $n = 2k+1$ （k は正の整数）とおくと，(1)より

$a_n - b_n = \frac{1}{24}(n-1)(n+1)\{(n-2)n-3\}$

$= \frac{2}{3}k(k-1)(k+1)^2$

k，$k-1$，$k+1$ は連続する3つの整数なので，

$k(k-1)(k+1)^2$ は 3の倍数 かつ 偶数

~~また，$k+1$ が偶数のとき，$k(k-1)(k+1)^2$ は4の倍数~~

~~$k+1$ が奇数のときも，〃~~

~~であるから $a_n - b_n$ は / 8~~

~~また，k，$k-1$ は 連続する3整数なので $k(k-$~~

$\therefore$ $a_n - b_n$ は

4の倍数．