2016年 工学部 第1問　　1枚目／2枚

$\boxed{1}$ 関数 $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+1}$ のグラフを曲線 C とする．

(1) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ．

(2) 曲線 C の変曲点を求めよ．

(3) 曲線 C 上の点 $(0,\ f(0))$ における接線を ℓ とする．曲線 C と接線 ℓ とで囲まれた図形の面積 S を求めよ．

(1) $f'(x)=\dfrac{1\cdot(x^2+1)-(x-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$

$\therefore$ $f'(x)=0$ となるのは，$x=1\pm\sqrt{2}$

$f''(x)=\dfrac{(-2x+2)(x^2+1)^2-(-x^2+2x+1)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}$

$=\dfrac{2(x+1)(x^2-4x+1)}{(x^2+1)^3}$

$\therefore$ $f''(x)=0$ となるのは，$x=-1,\ 2\pm\sqrt{3}$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$1-\sqrt{2}$	$\cdots$	$2-\sqrt{3}$	$\cdots$	$1+\sqrt{2}$	$\cdots$	$2+\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘		↗		↗		↘		↘
				極小				極大			

増減表より，$\begin{cases} \text{極大値は } f(1+\sqrt{2})=\dfrac{1+\sqrt{2}-1}{(1+\sqrt{2})^2+1}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2} \\ \text{極小値は } f(1-\sqrt{2})=\dfrac{1-\sqrt{2}-1}{(1-\sqrt{2})^2+1}=-\dfrac{\sqrt{2}+1}{2} \end{cases}$ //

(2) $f(-1)=-1$，$f(2-\sqrt{3})=\dfrac{2-\sqrt{3}-1}{(2-\sqrt{3})^2+1}=-\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$，$f(2+\sqrt{3})=\dfrac{2+\sqrt{3}-1}{(2+\sqrt{3})^2+1}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$

$\therefore$ 増減表より変曲点は $\underline{(-1,-1),\ \left(2-\sqrt{3},\ -\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}\right),\ \left(2+\sqrt{3},\ \dfrac{\sqrt{3}-1}{4}\right)}$ //

(3) $f(0)=-1$，$f'(0)=1$ より　$\ell: y=x-1$

ℓ と C の交点を求めると，

$\dfrac{x-1}{x^2+1}=x-1 \iff x^2(x-1)=0$

$\iff x=0,\ 1$　　　よって，$(0,-1)$ と $(1,0)$

0002191908087999

名古屋工業大学

2016 年 工学部 第 1 問　　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{1}$ 関数 $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$ のグラフを曲線 C とする.

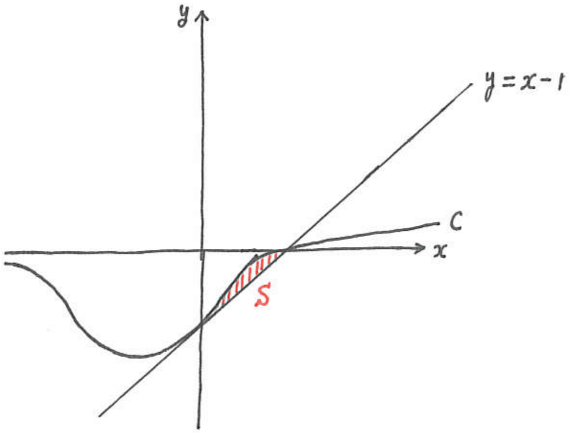
(1) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ.

(2) 曲線 C の変曲点を求めよ.

(3) 曲線 C 上の点 $(0,\ f(0))$ における接線を ℓ とする. 曲線 C と接線 ℓ とで囲まれた図形の面積 S を求めよ.

(3) のつづき

$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ より 下図のようになる



$$\therefore\ S = \int_0^1 \frac{x-1}{x^2+1} - (x-1)\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\cdot\frac{1}{2}\,dx - \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx} - \int_0^1 x-1\,dx$$

$x = \tan\theta$ とおいて 置換積分

$dx = \dfrac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$,　$\begin{array}{c|c} x & 0 \to 1 \\ \theta & 0 \to \frac{\pi}{4} \end{array}$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta - \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left[\log(x^2+1)\right]_0^1 - \left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \left(\frac{1}{2} - 1\right)$$

$$= \underline{\frac{1}{2}\log 2 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}}\ //$$