名古屋工業大学

2016年 工学部 第2問　1枚目/2枚

2 数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = 4, \quad a_{n+1} = \frac{(3n+4)a_n - 9n - 6}{(n+1)a_n - 3n - 1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たす.

(1) すべての自然数 n に対し, $a_n > 3$ であることを示せ.

(2) $b_n = \dfrac{1}{a_n - 3}$ とおく. b_{n+1} を b_n と n の式で表せ.

(3) (2)で定めた数列 $\{b_n\}$ に対し $c_n = b_{n+1} - b_n$ とおく. 数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ.

(4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(1) 漸化式より, $a_{n+1} - 3 = \dfrac{(3n+4)a_n - 9n - 6 - 3\{(n+1)a_n - 3n - 1\}}{(n+1)a_n - 3n - 1}$

$$= \frac{a_n - 3}{(n+1)a_n - 3n - 1}$$

$$= \frac{a_n - 3}{n(a_n - 3) + a_n - 1} \quad \cdots (*)$$

数学的帰納法により, $a_n > 3$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を示す.

(i) $n = 1$ のとき

$a_1 = 4 > 3$ $\therefore$ $n = 1$ のときは成り立つ

(ii) $n = k$ のとき成り立つと仮定すると, $a_k > 3$ であるから $(*)$ より, $a_{k+1} - 3 > 0$

$\therefore$ $a_{k+1} > 3$ となり, $n = k+1$ のときも成り立つ

(i), (ii) より, すべての自然数 n に対し, $a_n > 3$ である ■

(2) (1)より, $(*)$ の両辺は正であるから, 逆数をとって,

$$\frac{1}{a_{n+1} - 3} = \frac{n(a_n - 3) + a_n - 1}{a_n - 3}$$

$$= n + \frac{a_n - 3 + 2}{a_n - 3}$$

$$= n + 1 + \frac{2}{a_n - 3}$$

$\therefore$ $\underline{b_{n+1} = 2b_n + n + 1}$ $\cdots$ ①

(3) ① より, $b_{n+2} = 2b_{n+1} + n + 2$ $\cdots$ ②

② − ① より, $b_{n+2} - b_{n+1} = 2(b_{n+1} - b_n) + 1$

$\therefore$ $c_{n+1} = 2c_n + 1$

2016年 工学部 第2問

2枚目/2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ 数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = 4, \quad a_{n+1} = \frac{(3n+4)a_n - 9n - 6}{(n+1)a_n - 3n - 1} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たす．

(1) すべての自然数 n に対し，$a_n > 3$ であることを示せ．

(2) $b_n = \dfrac{1}{a_n - 3}$ とおく．b_{n+1} を b_n と n の式で表せ．

(3) (2) で定めた数列 $\{b_n\}$ に対し $c_n = b_{n+1} - b_n$ とおく．数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) のつづき

$$c_{n+1} + 1 = 2(c_n + 1)$$

①を使った

$\therefore \{c_n + 1\}$ は初項 $b_2 - b_1 + 1 = b_1 + 3 = 4$，公比 2 の等比数列

$$\therefore c_n + 1 = 4 \cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore \underline{c_n = 2^{n+1} - 1} \text{〃}$$

(4)
$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \quad (n \geqq 2)$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2^{k+1} - 1)$$

$$= 1 + \frac{4(1 - 2^{n-1})}{1 - 2} - (n-1)$$

$$= 1 + 4(2^{n-1} - 1) - n + 1$$

$$= 2^{n+1} - n - 2$$

これは $n = 1$ のときも成り立っている

$$\therefore b_n = 2^{n+1} - n - 2 \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$\therefore \frac{1}{a_n - 3} = 2^{n+1} - n - 2$$

$$a_n - 3 = \frac{1}{2^{n+1} - n - 2}$$

$$\underline{a_n = 3 + \frac{1}{2^{n+1} - n - 2}} \text{〃}$$