0002192277087999

名古屋工業大学

2016年 工学部 第4問　1枚目/2枚　数理 石井K

4 実数 t に対し，複素数

$$\left(\frac{1}{2}+\cos t+i\sin t\right)^2$$

の実部を $f(t)$，虚部を $g(t)$ とする．座標平面上に

曲線 $C: x=f(t),\quad y=g(t)\quad (0 \leqq t \leqq \pi)$

がある．

(1) $0 \leqq t \leqq \pi$ のとき $f(t)$ のとる値の範囲を求めよ．

(2) 曲線 C 上の点 $\mathrm{P}\left(f\left(\frac{\pi}{3}\right),\ g\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ における接線の方程式を求めよ．

(3) 曲線 C の $y \leqq 0$ の範囲にある部分と x 軸とで囲まれた図形の面積 S を求めよ．

(1) $f(t)=\left(\frac{1}{2}+\cos t\right)^2-\sin^2 t$

$=\frac{1}{4}+\cos t+\cos^2 t-(1-\cos^2 t)$

$=2\cos^2 t+\cos t-\frac{3}{4}$

$=2\left(\cos t+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{7}{8}$

$0 \leqq t \leqq \pi$ より，$-1 \leqq \cos t \leqq 1$ であるから，$-\frac{7}{8} \leqq f(t) \leqq \frac{9}{4}$

(2) $g(t)=2\cdot\left(\frac{1}{2}+\cos t\right)\cdot\sin t$

$=\sin t+2\sin t\cos t$

$\therefore\ f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{4},\ g\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$

点Pにおける接線の傾きを求める．$f'(t)=-4\sin t\cos t-\sin t$，$g'(t)=\cos t+2\cos 2t$

$\therefore\ f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{2},\ g'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$　$\therefore$ 傾きは，$\dfrac{-\frac{1}{2}}{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{9}$

$\therefore\ y=\frac{\sqrt{3}}{9}\left(x-\frac{1}{4}\right)+\sqrt{3}$　$\therefore\ \underline{y=\frac{\sqrt{3}}{9}x+\frac{35\sqrt{3}}{36}}$ //

(3) $g(t) \leqq 0 \iff \sin t(1+2\cos t) \leqq 0$

$0 \leqq t \leqq \pi$ より，$t=0,\ \frac{2\pi}{3} \leqq t \leqq \pi$

$\therefore\ S=\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}(-\sin t-2\sin t\cos t)\cdot\frac{dx}{dt}\cdot dt$

$=\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}(\sin t+\sin 2t)(\sin t+2\sin 2t)\,dt$

2枚目へつづく

2016年 工学部 第4問

2枚目/2枚

数理 石井K

4 実数 t に対し，複素数

$$\left(\frac{1}{2}+\cos t+i\sin t\right)^2$$

の実部を $f(t)$，虚部を $g(t)$ とする．座標平面上に

曲線 $C: x=f(t),\quad y=g(t)\quad (0\leqq t\leqq\pi)$

がある．

(1) $0\leqq t\leqq\pi$ のとき $f(t)$ のとる値の範囲を求めよ．

(2) 曲線 C 上の点 $\mathrm{P}\left(f\left(\frac{\pi}{3}\right),\ g\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ における接線の方程式を求めよ．

(3) 曲線 C の $y\leqq 0$ の範囲にある部分と x 軸とで囲まれた図形の面積 S を求めよ．

(3) のつづき

$$S=\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\sin^2 t+3\sin t\sin 2t+2\sin^2 2t\ dt$$

半角の公式と $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\}$ より

$$=\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}+3\cdot\frac{1}{2}(\cos t-\cos 3t)+2\cdot\frac{1-\cos 4t}{2}\ dt$$

$$=\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}-\cos 4t-\frac{3}{2}\cos 3t-\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{3}{2}\cos t+\frac{3}{2}\ dt$$

$$=\left[-\frac{1}{4}\sin 4t-\frac{1}{2}\sin 3t-\frac{1}{4}\sin 2t+\frac{3}{2}\sin t+\frac{3}{2}t\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{3}{2}\pi-\left(-\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{3\sqrt{3}}{4}+\pi\right)$$

$$=\underline{\frac{\pi}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{4}}\ //$$