秋田大学

2012年 医学部 第2問

数理 石井K

2 aを実数とする．θが

$$\frac{1}{\sin\theta}-\frac{1}{\cos\theta}=a$$

を満たしているとき，次の問いに答えよ．ただし，$0^\circ<\theta<45^\circ$とする．

(1) $\cos\theta-\sin\theta$をaで表せ．

(2) $a=\frac{4}{3}$のとき，θと25°の大小を比べよ．

(1) $t=\cos\theta-\sin\theta$ とおくと $t^2=1-2\sin\theta\cos\theta$ …①

また，与式の両辺に $\sin\theta\cos\theta$ をかけて．

$\cos\theta-\sin\theta=a\sin\theta\cos\theta$ $\quad\therefore\ t=a\sin\theta\cos\theta$ …②

①，② より． $t=a\cdot\frac{1-t^2}{2}$ $\quad\therefore\ at^2+2t-a=0$

$0^\circ<\theta<45^\circ$ より． $t>0$，$a>0$ なので $t=\frac{-2+\sqrt{4+4a^2}}{2a}=\underline{\frac{-1+\sqrt{1+a^2}}{a}}$ //

(2) $\cos\theta-\sin\theta=\dfrac{-1+\sqrt{1+\frac{16}{9}}}{\frac{4}{3}}=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \sin\theta=\cos\theta-\frac{1}{2}$ 両辺を2乗して． $\sin^2\theta=\cos^2\theta-\cos\theta+\frac{1}{4}$

$\therefore\ 2\cos^2\theta-\cos\theta-\frac{3}{4}=0$

$0^\circ<\theta<45^\circ$ より．$\cos\theta>0$ なので $\cos\theta=\frac{1+\sqrt{7}}{4}$

3倍角の公式より． $\cos3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

$=2\left(\cos\theta+\frac{3}{4}\right)\cos\theta-3\cos\theta$

$=\cos\theta+\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\cos\theta$

$=\frac{5-\sqrt{7}}{8}$

一方，$\cos75^\circ=\cos(30^\circ+45^\circ)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{2(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{8}$

$\{2(\sqrt{6}-\sqrt{2})\}^2-(5-\sqrt{7})^2=10\sqrt{7}-16\sqrt{3}$

$(10\sqrt{7})^2-(16\sqrt{3})^2=700-768=-68<0$ より． $\{2(\sqrt{6}-\sqrt{2})\}^2-(5-\sqrt{7})^2<0$

$\therefore\ \cos3\theta>\cos75^\circ$ $\quad 0^\circ<\theta<45^\circ$ より． $3\theta<75^\circ$ $\quad\therefore\ \underline{\theta<25^\circ}$ //