



2010年理系第3問

3 原点を中心とする半径1の円を  $C_1$  とし, 原点を中心とする半径  $\frac{1}{2}$  の円を  $C_2$  とする.  $C_1$  上に点  $P_1(\cos \theta, \sin \theta)$  があり, また,  $C_2$  上に点  $P_2(\frac{1}{2} \cos 3\theta, \frac{1}{2} \sin 3\theta)$  がある. ただし,  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$  であるとする. 線分  $P_1P_2$  の中点を  $Q$  とし, 点  $Q$  の原点からの距離を  $r(\theta)$  とする. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 点  $Q$  の  $x$  座標の取りうる範囲を求めよ.
- (2) 点  $Q$  が  $y$  軸上にあるときの  $\theta$  の値を  $\alpha$  とする. このとき,  $\alpha$  および定積分

$$\int_0^{\alpha} \{r(\theta)\}^2 d\theta$$

を求めよ.