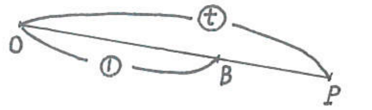
2016年 工学部 第3問

$\boxed{3}$ 座標空間内に



O(0, 0, 0), A(1, 2, 2), B(1, 0, −1), C(2, −1, 1)

を頂点とする四面体OABCがある．$t>0$ に対して半直線OB上の点Pを OB : OP = 1 : t となるようにとる．

(1) 内積 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}$ を t を用いて表せ．

(2) △APCの面積を $S(t)$ とおく．$S(t)$ が最小になる t の値と，そのときの $S(t)$ の値を求めよ．

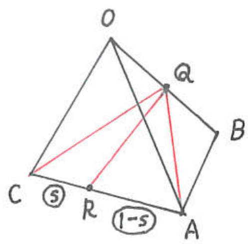
(3) 点Qは直線OB上にあり，点Rは直線AC上にある．線分QRの長さの最小値と，そのときの点Rの座標を求めよ．

(1) $\overrightarrow{AC}=(1,-3,-1)$, $\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OB}=(t,0,-t)$

$\overrightarrow{AP}=(t-1,-2,-t-2)$

$\therefore\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}=t-1+6+t+2=\underline{2t+7}$ //

(2) $|\overrightarrow{AC}|^2=1+9+1=11$, $|\overrightarrow{AC}|^2=(t-1)^2+4+(-t-2)^2=2t^2+2t+9$



$$\therefore\ S(t)=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AC}|^2|\overrightarrow{AP}|^2-(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{11(2t^2+2t+9)-(2t+7)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{18t^2-6t+50}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{18\left(t-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{99}{2}}$$

$\therefore\ \underline{t=\frac{1}{6}\text{ のとき, } S(t)\text{ は最小値 }\frac{3\sqrt{22}}{4}\text{ をとる}}$ //

(3) QRが最小となるのは，$S(t)$ が最小となるときなので (2)より，$t=\frac{1}{6}$

$\therefore\ Q\left(\frac{1}{6},0,-\frac{1}{6}\right)$

CR : RA = $s:1-s$ とおくと，$\overrightarrow{OR}=s\overrightarrow{OA}+(1-s)\overrightarrow{OC}=(2-s,3s-1,s+1)$

$\therefore\ \overrightarrow{QR}=\left(\frac{11}{6}-s,3s-1,s+\frac{7}{6}\right)$, $\overrightarrow{AC}=(1,-3,-1)$

$\therefore\ \overrightarrow{QR}\perp\overrightarrow{AC}$ より，$\overrightarrow{QR}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ $\therefore\ \frac{11}{6}-s-3(3s-1)-s-\frac{7}{6}=0$ $\therefore\ s=\frac{1}{3}$

$\therefore\ \underline{R\left(\frac{5}{3},0,\frac{4}{3}\right)}$ // このとき，$\overrightarrow{QR}=\left(\frac{3}{2},0,\frac{3}{2}\right)$ $\therefore\ \underline{QR=\frac{3\sqrt{2}}{2}}$ //